



Enoncés

Exercice 1. Calcul intégral

1) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_{10}^{15} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$$

- a) Justifier l'existence de I .
 b) Déterminer deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in [10, 15], \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

c) Déterminer la valeur de I .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt.$$

- a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
 b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n(x)$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \tan \theta$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$

4) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - px + \frac{p}{2}\right) dx$.

Exercice 2. Convergence de suites d'intégrales

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On définit alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 f(t) dt.$$

1) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2) On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = f(1).$$

Correction

Exercice 1.

1)a) La fonction $x \mapsto \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$ étant continue sur $[10,15]$ comme fonction rationnelle définie sur $[10,15]$, on peut conclure :

Il est bien définie.

b) Soit $x \in [10,15]$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5) + B(x-3)}{(x-3)(2x+5)} \\ &\Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{(2A+B)x + (5A-3B)}{(x-3)(2x+5)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que A et B conviennent, il suffit donc l'on ait :

$$\begin{cases} 2A + B = -1 \\ 5A - 3B = 6 \end{cases} \quad \text{d'où après calculs :}$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{11} \\ B = -\frac{17}{11} \end{cases} \quad \text{soit finalement :}$$

$$\forall x \in [10,15], \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{3}{11} x \frac{1}{x-3} - \frac{17}{11} x \frac{1}{2x+5}$$

c) D'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{11} \int_{10}^{15} \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11} \int_{10}^{15} \frac{dx}{2x+5} && \text{d'où} \\ &= \frac{3}{11} \left[\ln|x-3| \right]_{10}^{15} - \frac{17}{11} \left[\frac{\ln|2x+5|}{2} \right]_{10}^{15} \\ &= \frac{3}{11} [\ln(12) - \ln(7)] - \frac{17}{22} [\ln(35) - \ln(25)] && \text{soit finalement :} \end{aligned}$$

$$I = \frac{3}{11} \ln\left(\frac{12}{7}\right) - \frac{17}{22} \ln\left(\frac{7}{5}\right)$$