# Continuité, dérivabilité

## Enoncé

**1)** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

**a)** Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

**b)** Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

**c)** h est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ ?

**2)** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{ème}$ des fonctions:

**a)** $x \to x^p (p \in \mathbb{N}^*)$,

**b)** $x \mapsto \ln x$

**c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

**3)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0$ un élément de I et f une fonction dérivable à gauche et à droite en $x_0$. Montrer que f est continue en $x_0$.

**4)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

**a)** Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.

**b)** Soient a et b deux réels tels que a<b. montrer que toute fonction de classe $C^1$ sur [a, b] est lipschitzienne sur [a, b].


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.