



## Continuité, dérivabilité

### Enoncé

1) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \end{cases}$$

- Montrer que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $h$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  ?

2) Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la dérivée  $n^{\text{ème}}$  des fonctions:

- $x \rightarrow x^p (p \in \mathbb{N}^*)$ ,
- $x \mapsto \ln x$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

3) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point,  $x_0$  un élément de  $I$  et  $f$  une fonction dérivable à gauche et à droite en  $x_0$ . Montrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .

4) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  si :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- Montrer que toute fonction lipschitzienne sur  $I$  est continue sur  $I$ .
- Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . montrer que toute fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  est lipschitzienne sur  $[a, b]$ .