edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**

Concours d'admission sur classes préparatoires

# MATHEMATIQUES

Option scientifique

**Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**Seules sont autorisées :**

*Une règle graduée.*
*Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.*

## EXERCICE 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\Delta$ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de E.

2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.

b. En déduire que $\Delta$ n'est pas surjective.

3) Montrer que $\Delta$ est injective.

4) On suppose, *dans cette question*, que $\Delta$ possède une valeur propre $\lambda$ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à $\lambda$.

a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\ e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.

b. Déterminer alors $\Delta(f)$.

5) Conclure à l'aide des questions précédentes que $\Delta$ n'a aucune valeur propre.

6) Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n = \Delta(F_{n-1})$.

a. Montrer que $F_n$ est de classe $C^{n+1}$.

b. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

**EXERCICE 2**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

a. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\, dt = 0$.

c. En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in ]0, +\infty[, |f(x)| < \frac{1}{2x}$.

b. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5) a. Montrer que $f(\pi / 2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

b. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\, dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

c. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

**EXERCICE 3**

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.
On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1) Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) a. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

b. Montrer que $\dim \operatorname{Im} g \leq 2$.

c. Déduire des questions précédentes que $\dim \operatorname{Im} g \circ f \leq 2$.

d. Conclure que gof n'est ni surjective, ni injective.

3) En déduire une valeur propre de BA.

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

a. Montrer que $BX \neq 0$.
b. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de AB alors $\lambda$ est valeur propre de BA.
c. En déduire que BA est diagonalisable.

**PROBLÈME**

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

**Partie I**

Une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, étant définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A étant un événement de $\mathcal{A}$, de probabilité non nulle, on définit la variable aléatoire $T = Z / A$ ( Z sachant que A est réalisé) par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = P([Z = k] / A)$.

On considère un événement A vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.

Montrer que si Z a une espérance, alors $Z / A$ et $Z / \overline{A}$ ont aussi une espérance et que :
$E(Z) = P(A)\, E(Z / A) + P(\overline{A})\, E(Z / \overline{A})$.

**Partie II**

On dispose de deux urnes, U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient 2n boules numérotées de 1 à 2n.

On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, un nombre compris entre 1 et 2n, puis à transférer la boule portant le numéro choisi, de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre urne.

Pour tout entier k élément de $[\![ 0, 2n ]\!]$, on dit que U est dans l'état $E_k$ lorsque U contient k boules et on dit que U accède à l'état $E_k$ lorsque U contient k boules **pour la première fois**.

On note $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que U accède à l'état $E_k$ et égale à 0 si l'état $E_k$ n'est jamais atteint.

On admettra que $X_k$ a une espérance, notée $m_k$.

Enfin, pour tout entier j, élément de $[\![ 0, 2n-1 ]\!]$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$.

Le but de cette partie est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_k$, c'est-à-dire d'évaluer le nombre $m_k$.

1) Montrer que $X_0$ et $X_1$ sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.

2) a. Donner, pour tout j élément de $[\![ 0, 2n-1 ]\!]$, une interprétation de la variable $N_j$.
b. Montrer que $N_j$ a une espérance que l'on notera $\mu_j$ dans la suite.

3) Soit j un élément de [| 1, 2n -1 |].

a. Soit $A_j$ l'événement : " U accède à l'état $E_{j+1}$ depuis l'état $E_j$, en une seule épreuve". Calculer $P(A_j)$.

b. Montrer que $N_j / A_j$ est la variable certaine égale à 1 et que $N_j / \overline{A}_j = 1 + N_{j-1} + N_j$.

c. Montrer, en utilisant la partie I, que : $\forall j \in [| 1, 2n-1 |]$, $\mu_j = \dfrac{2n + j\,\mu_{j-1}}{2n-j}$.

d. En déduire que : $\forall j \in [| 0, 2n-1 |]$, $\mu_j = 2n\displaystyle\int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j\,dx$

4) Soit k un élément de [| 1, 2n |].

a. Écrire, en la justifiant, la relation liant $X_k$ et $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$.

b. En déduire la relation liant $m_k$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$.

c. Vérifier que : $\forall x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = x^{2n-k}\left(\frac{x^k-(2-x)^k}{2(x-1)}\right)$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2n-k}\left[\frac{x^k-(2-x)^k}{2(x-1)}\right]dx$ est convergente.

5) En déduire que : $\forall k \in [| 0, 2n |]$, $m_k = n\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n-k}\left[\frac{(1+t)^k-(1-t)^k}{t}\right]dt$.

**Partie III : étude de deux cas particuliers.**

1) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_n$, c'est-à-dire pour que, pour la première fois les urnes U et V contiennent le même nombre de boules.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$ (on pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique).

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

c. En déduire alors que : $m_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$.

2) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état $E_{2n}$, c'est-à-dire pour que, pour la première fois l'urne V soit vide.

a. Pour tout entier naturel p, on pose : $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}\,dt$.

Vérifier que $I_p$ est une intégrale convergente puis calculer $I_p - I_{p-1}$.

b. En déduire que $m_{2n} = n\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{2^k}{k}$.

# Exercice 1

**1)** Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue, pour tout x $\mathbb{R}$, sur [x, x + 1], donc, pour tout x $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x f(t)dt$ existe et la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta$ est une application de E dans E.

Soient alors $(f_1, f_2)$ $E^2$ et $\lambda$ $\mathbb{R}$. E étant un espace vectoriel, $f_1 + \lambda f_2$ est un élément de E. Notons alors $g_1$, $g_2$ et g les images respectives des fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_1 + \lambda f_2$ par $\Delta$. On a :

$x \ \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x (f_1(t) + \lambda f_2(t))\,dt$ donc, par linéarité de l'intégrale :

$= \int_0^x f_1(t)\,dt + \lambda \int_0^x f_2(t)\,dt$ i.e. :

$= g_1(x) + \lambda g_2(x)$ soit encore :

$\Delta(f_1 + \lambda f_2) = \Delta(f_1) + \lambda \Delta(f_2)$.

$\Delta$ est donc une application linéaire de E dans E. On peut donc conclure :

$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de E}}$

**2) a)** Soit f E. f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'elles. On peut alors écrire, en notant g l'image de f par $\Delta$:

$x \ \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - F(0)$.

F étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, g est donc de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{Pour toute fonction f de E, } \Delta(f) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

**b)** Soit $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le résultat précédent, on peut écrire : $\mathrm{Im}\,\Delta \ \mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq E$ (par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle appartient à E mais, n'étant pas dérivable en 0, elle n'appartient pas à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ainsi, $\mathrm{Im}\,\Delta \neq E$. On peut donc conclure :

$\boxed{\Delta \text{ n'est pas surjective de E dans E}}$

**3)** Soit f un élément de Ker Δ. On a :

$\Delta(f) = 0$ $\quad x \ \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$ soit, en notant F la primitive de f qui s'annule en 0 :

$x \ \mathbb{R},\ F(x) = 0$ soit, par dérivation, f étant la dérivée de F :

$x \ \mathbb{R},\ f(x) = 0$ i.e. :

$f = 0$.

Ainsi, on a : Ker Δ = {0}. On peut finalement conclure :

$\boxed{\Delta \text{ est pas injective de E dans E}}$

**4) a)** Comme f est un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre λ, on a : Δ(f) = λf, soit, comme λ est une valeur propre non nulle de Δ : $f = \frac{1}{\lambda}\Delta(f)$. Or, d'après le résultat de la question 2b, Δ(f) est dérivable sur ℝ, donc f est dérivable sur ℝ. Ainsi, h est dérivable sur ℝ comme produit de fonction dérivables sur ℝ, et on a :

$x \ \mathbb{R},\ h'(x) = \left(f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x)\right) e^{-\frac{x}{\lambda}}$.

Or, on a : $f' = \frac{1}{\lambda}\Delta(f)'$, donc, comme : $x \ \mathbb{R},\ \Delta(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ : $f' = \frac{1}{\lambda} f$. On peut donc écrire :

$x \ \mathbb{R},\ h'(x) = 0$.

La fonction h étant de dérivée nulle, on peut donc conclure :

$\boxed{h \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$

**b)** Comme h est constante sur ℝ, on peut donc écrire qu'il existe un réel c tel que :

$t \ \mathbb{R},\ h(t) = c$ i.e. :

$t \ \mathbb{R},\ f(t)\, e^{-\frac{t}{\lambda}} = c$ d'où :

$t \ \mathbb{R},\ f(t) = c e^{\frac{t}{\lambda}}$ donc, par définition de Δ, en notant g l'image de f par Δ :


**Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE - Maxence DEHORTER**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x c\, e^{\frac{t}{\lambda}}\, dt \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \left[\lambda c\, e^{t/\lambda}\right]_0^x \qquad \text{d'où :}$$

$$\boxed{\Delta(f) \text{ est la fonction } g \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda c\, e^{\frac{x}{\lambda}} - \lambda c}$$

**5)** Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $f_{\lambda,c}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\lambda,c}(x) = c\, e^{\frac{x}{\lambda}}$. D'après le résultat de la question 4a, si $\lambda$ est valeur propre de $\Delta$, alors les seules fonctions propres non nulles possibles de $\Delta$ associées à la valeur propre $\lambda$ sont les fonctions $(f_{\lambda,c})_{c \in \mathbb{R}^*}$. Or, d'après le résultat de la question 4b, on a, comme $\lambda c \neq 0$ : $\forall c \in \mathbb{R}^*,\ \Delta(f_{\lambda,c}) \neq \lambda f_{\lambda,c}$. Ainsi, $\Delta$ ne peut admettre de valeur propre non nulle. De plus, d'après le résultat de la question 3, $\Delta$ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de $\Delta$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\Delta \text{ n'a aucune valeur propre}}$$

**6) a)** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

• Au rang $n = 0$. Comme $F_0 \in \operatorname{Im} \Delta$ et comme $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F_0$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. La propriété est donc vérifiéé au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $F_n$ soit de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On a : $F_{n+1} = \Delta(F_n)$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)\, dt\ .$$

Ainsi, $F_{n+1}$ est la primitive de $F_n$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Or, par hypothèse de récurrence, $F_n$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$. Ses primitives, et en particulier $F_{n+1}$, sont donc de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

• On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ est de classe } C^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}}$$

**b)** • Soit $n \in \mathbb{N}$. $F_n$ étant de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, elle est de classe $C^{n+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sur le segment d'extrémités 0 et x. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, F_n^{(n+1)}(t)\, dt\ ✽.$$

✿ Soit n ℕ*. Montrons alors par récurrence que : k ⟦0, n⟧, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.

• Au rang k = 0. On a : $F_n^{(0)} = F_n$. La propriété est donc bien vérifiée au rang k = 0.

• Soit k ⟦0, n - 1⟧. Supposons que : $F_n^{(k)} = F_{n-k}$. On a alors : $F_n^{(k+1)} = F_{n-k}'$. Or, par définition de $F_{n-k}$, $F_{n-k}$ est la primitive de $F_{n-k-1}$ nulle en 0. On a donc : $F_n^{(k+1)} = F_{n-k-1}$. La propriété est donc vérifiée au rang k + 1.

• On a donc : k ⟦0, n⟧, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.

En considérant la relation ✿, on peut donc écrire :

x ℝ, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{n-k}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt$ donc, comme : k ⟦0, n⟧, $F_k(0) = 0$ :

$= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt$ d'où, comme $F_0' = f$ :

$$\boxed{n \ \mathbb{N},\quad x \ \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt}$$

# Exercice 2

**1) a)** g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur ces intervalles. De plus, il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que, quand t est au voisinage de 0 :

$\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + t^3\,\varepsilon(t)$ donc :

$g(t) = -\dfrac{t}{6} + t\varepsilon(t)$ d'où :

$\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0.$

Comme g(0) = 0, on peut donc conclure :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

**b)** g étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. Soit G l'une d'entre elles. On peut alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt = G(2x) - G(x)$. Or, comme G est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$\lim\limits_{x \to 0} G(2x) = \lim\limits_{x \to 0} G(x) = G(0)$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0}$$

**c)** On a, par linéarité de l'intégration :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\,dt$ i.e. :

$= \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$ soit encore :

$= \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt + \Big[\ln|t|\Big]_x^{2x}$ d'où :


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE - Maxence DEHORTER

$$= \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln|2x| - \ln|x|$$ soit finalement :

$$= \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln 2.$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, on a : $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$. On a donc : $\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$. Comme $f(0) = \ln 2$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

**2)** On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$. La fonction $t \mapsto -t$ étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors écrire, en effectuant le changement de variable $u = -t$ $(du = -dt)$ :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{u^2}\,du$ donc, sin étant impaire :

$= \int_x^{2x} \frac{\sin u}{u^2}\,du$ i.e. :

$= f(x)$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

**3) a)** La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur ces intervalles. Ses primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc dérivables sur ces intervalles. Soit G l'une d'entre elles. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = G(2x) - G(x)$. f étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc conclure :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et sur } \mathbb{R}_+^*}$$

**b)** En considérant la primitive G de $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ définie précédemment, on a :


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE - Maxence DEHORTER