Terme général d'une suite

Enoncé

1/ a) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

b) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 2\cos\theta \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2} = 2\cos\theta v_{n+1} - v_n \end{cases}$$

2/ Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} = 3w_n + 2 \end{cases}$$

3/ Déterminer le terme général de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ z_{n+1} = (n+1)z_n + 1 \end{cases}$$

Correction

1/ a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est (E) : $x^2-x-1 = 0$.

(E) admettant $\Delta = 1+4=5$ pour discriminant, elle admet deux solutions distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En considérant u_0 et u_1, on peut alors écrire que α et β sont solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Or, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$