



Probabilités conditionnelles

Enoncés

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

- 1) On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne, au hasard. Pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note E_p l'événement : "le numéro de la boule obtenue au $p^{\text{ème}}$ tirage est inférieur ou égal à chacun des numéros des boules obtenues précédemment".
 - a) Déterminer la probabilité de E_2 et E_3 .
 - b) Déterminer pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ la probabilité de E_p .
- 2) On suppose maintenant que les tirages s'effectuent sans remise. Déterminer pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la probabilité de E_p .

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Sur une piste de danse, n couples (n hommes et n femmes) sont formés puis séparés à l'issue d'une première danse. On reconstitue à nouveau n couples, au hasard, pour une seconde danse.

- 1) Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'aucun des couples initiaux ne soit reconstitué ?

Correction

Exercice 1

1) a) Notons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, U_k l'événement : "la boule obtenue au premier tirage porte le numéro k ". La famille $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_2) = \sum_{k=1}^n p\left(E_2 / U_k\right) p(U_k).$$

De plus :

- les tirages étant équiprobables, on a : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(U_k) = \frac{1}{n}$,
- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sachant que l'événement U_k est réalisé, l'événement E_2 est réalisé si, et seulement si, le numéro de la boule obtenue au second tirage est compris entre 1 et k . Il y a donc k tirages favorables, et donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p\left(E_2 / U_k\right) = \frac{k}{n}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} \text{ et donc :} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \quad \text{d'où la conclusion d'après le cours :} \end{aligned}$$

$$p(E_2) = \frac{n+1}{2n}$$

Notons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, V_k l'événement : "le plus petit numéro obtenu au cours des deux premiers tirages est k ". La famille $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_3) = \sum_{k=1}^n p\left(E_3 / V_k\right) p(V_k).$$