



## Probabilités conditionnelles

### Enoncés

#### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

- 1) On effectue  $n$  tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne, au hasard. Pour tout  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on note  $E_p$  l'événement : "le numéro de la boule obtenue au  $p^{\text{ème}}$  tirage est inférieur ou égal à chacun des numéros des boules obtenues précédemment".
  - a) Déterminer la probabilité de  $E_2$  et  $E_3$ .
  - b) Déterminer pour tout  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$  la probabilité de  $E_p$ .
- 2) On suppose maintenant que les tirages s'effectuent sans remise. Déterminer pour tout  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , la probabilité de  $E_p$ .

#### Exercice 2

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Sur une piste de danse,  $n$  couples ( $n$  hommes et  $n$  femmes) sont formés puis séparés à l'issue d'une première danse. On reconstitue à nouveau  $n$  couples, au hasard, pour une seconde danse.

- 1) Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'aucun des couples initiaux ne soit reconstitué ?

## Correction

## Exercice 1

1) a) Notons pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $U_k$  l'événement : "la boule obtenue au premier tirage porte le numéro  $k$ ". La famille  $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$  formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_2) = \sum_{k=1}^n p\left(E_2 / U_k\right) p(U_k).$$

De plus :

- les tirages étant équiprobables, on a :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(U_k) = \frac{1}{n}$ ,
- pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , sachant que l'événement  $U_k$  est réalisé, l'événement  $E_2$  est réalisé si, et seulement si, le numéro de la boule obtenue au second tirage est compris entre 1 et  $k$ . Il y a donc  $k$  tirages favorables, et donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p\left(E_2 / U_k\right) = \frac{k}{n}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} \text{ et donc :} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \quad \text{d'où la conclusion d'après le cours :} \end{aligned}$$

$$p(E_2) = \frac{n+1}{2n}$$

Notons pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $V_k$  l'événement : "le plus petit numéro obtenu au cours des deux premiers tirages est  $k$ ". La famille  $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$  formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_3) = \sum_{k=1}^n p\left(E_3 / V_k\right) p(V_k).$$