



Partitions et involutions

Énoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ et $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à $2n$ éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.*

- Calculer a_1 et a_2 .
- Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).
- A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n .
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à*

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

- Déterminer b_1 , b_2 , b_3 et b_4 .

- b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^p C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p .

- c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$).
- d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle *involution* d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = \text{id}$. On note alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, T_m le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$