Partitions et involutions

Enoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.

a) Calculer a_1 et a_2.

b) Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).

c) A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

a) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^{p} C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p.

c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$.

d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle involution d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = id$. *On note alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, T_m *le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.