



## Enoncés

## Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $U_n$  le nombre de codages binaires à  $n$  chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer  $U_1$  et  $U_2$ .
2. Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $U_{n+2}$  en fonction de  $U_{n+1}$  et  $U_n$ .

## Exercice 2.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par  $n$  murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de  $p$  couleurs différentes ( $p \geq 2$ ). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note  $N_{n,p}$  le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2) N_{n+1,p} + (p-1) N_{n,p}.$$

## Exercice 3.

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

- 1) Dénombrer les couples de parties  $(A,B)$  de  $E$  telles que  $A \cup B = E$
- 2) Dénombrer les triplets de parties  $(A,B,C)$  de  $E$  telles que  $A \cup B \cup C = E$

## Correction

## Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_{n+2}$  l'ensemble des codages binaires de  $n+2$  chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs,  $B_{n+2}$  les codages de  $A_{n+2}$  dont l'avant dernier chiffre est 1 et  $C_{n+2}$  l'ensemble des codages de  $A_{n+2}$  dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

$$\text{Card } A_{n+2} = \text{Card } B_{n+2} + \text{Card } C_{n+2}$$

De plus :

$$\text{-Card } A_{n+2} = U_{n+2} \text{ (par définition)}$$

-Card  $B_{n+2} = U_{n+1}$  (il y a autant de codages de  $n+1$  chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de  $n+2$  chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card  $C_{n+2} = U_n$  (comme un codage de  $C_{n+2}$  ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en  $n^{\text{ème}}$  position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$