LES SYSTEMES AUTOMATISES

Transformées de Laplace - Calcul symbolique
Modèle transfert

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

1.4 Transformation de Laplace inverse

Cette opération consiste à rechercher la fonction temporelle *f(t)* qui correspond à une expression *F(p)* donnée.

Lorsque les fonctions en p sont sous forme de fractions rationnelles en p, la méthode la plus commode consiste à exprimer cette fonction comme une somme de termes plus simples dont on connaît les transformées inverses. (voir tableau des transformées usuelles au paragraphe 1.2.7)

Soit la fonction : $\dfrac{(a_m p^m + \ldots + a_1 p + a_0)}{(b_n p^n + \ldots + b_1 p + b_0)} = \dfrac{N(p)}{D(p)} = H(p)$

En admettant que les racines du dénominateur ne soient pas d'ordre multiple, on peut factoriser le dénominateur en suivant la nature réelle ou complexe des racines.

- Si $b_0 \neq 0$

$$D(p) = \prod_{i=1}^{k}(p+\alpha_i).\prod_{j=1}^{l}((p+\alpha_i)^2+\omega_j^2)$$

- Si $b_0 = 0$

$$D(p) = p\prod_{i=1}^{k}(p+\alpha_i).\prod_{j=1}^{l}((p+\alpha_i)^2+\omega_j^2)$$

on peut donc exprimer H(p) comme une somme de termes :

$$H(p)=\frac{A_0}{p}+\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{p+\alpha_i}+\sum_{j=1}^{l}\frac{A_j}{\left(p+\alpha_j\right)^2+\omega_j^2}+\sum_{j=1}^{l}\frac{B_j.\left(p+\alpha_j\right)}{\left(p+\alpha_j\right)^2+\omega_j^2}$$

Somme dans laquelle les coefficients A_0, A_i, B_i, B_j sont déterminés par identification. L'original temporel de chaque terme est alors obtenu par exploitation du tableau des transformées de Laplace. La réponse totale est donc une combinaison linéaire de type :

Constante, $e^{-\alpha_i t}$, $e^{-\alpha_i t}\,sin(\omega_0 t)$ et $e^{-\alpha_i t}\,cos(\omega_0 t)$

1.4.1 Exemple

Soit la fonction $X(p)=\dfrac{p+2}{(p+5)(p+10)}$, la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$X(p)=\frac{A_1}{p+5}+\frac{A_2}{p+10}$$

Par identification, il vient : $10A_1+5A_2=2$ et $A_1+A_2=1$, soit $A_1=-\dfrac{3}{5}$; $A_2=\dfrac{8}{5}$

D'où, $X(p)=\dfrac{-3/5}{p+5}+\dfrac{8/5}{p+10}$ ce qui conduit à la transformée de Laplace inverse x(t) en utilisant la connaissance ci-dessous :

$f(t)=e^{-at}$	$F(p)=\dfrac{1}{p+a}$

$$x(t)=-\frac{3}{5}.e^{-5t}+\frac{8}{5}.e^{-10t}$$

1.5 Transmittance d'un système linéaire

1.5.1 Representation de la transmittance d'un systeme : Fonction de transfert

Soit la loi de comportement du système exprimée à l'aide d'une équation différentielle :

$$B_n\frac{d^n s(t)}{dt^n}+\dots B_1\frac{d\,s(t)}{dt}+B_0\,s(t)=A_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+\dots A_1\frac{d\,e(t)}{dt}+A_0\,e(t)$$

Nous supposons que le système part du repos ; que l'étude de l'évolution du système se font autour du point au repos ou d'étude.

C'est à dire que l'entrée e(t) et ses dérivées ainsi que la sortie s(t) et ses dérivées sont causales d'une part et d'autre part que toutes les conditions initiales sont nulles (excepté $\left(\dfrac{d^n s(t)}{dt^n}\right)_{0^+}$ et $\left(\dfrac{d^m e(t)}{dt^m}\right)_{0^+}$ qui ne sont pas forcément nulles).

Si on prend la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle on obtient :

$$(B_n\,p^n+\dots+B_1\,p+B_0)\,S(p)=(A_m\,p^m+\dots+A_1\,p+A_0)\,E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{(A_m\,p^m+\dots+A_1\,p+A_0)}{(B_n\,p^n+\dots+B_1\,p+B_0)}=H(p)$$

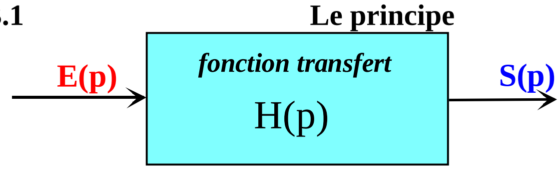
La fonction H(p) est appelée fonction de transfert ou transmittance du système. Elle est caractéristique du système qu'elle représente mathématiquement. C'est souvent une fraction rationnelle en p.

1.5.2 DEFINITIONS ET REMARQUES :

- Les systèmes physiques rencontrés sont tels que : $m \leq n$
- n est appelé l'ordre du système.
- Les racines du dénominateur sont appelées « Pôle ». Pour que la fonction soit stable il est nécessaire que les pôles soient à partie réelle négative et seulement un pôle réel nul.
  Un système est dit intégrateur lorsqu'il possède un pôle en p=0.
  Si la transmittance s'écrit : $\dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{(A_m\, p^m + \ldots + A_1\, p + A_0)}{p^c.(B_n\, p^n + \ \ldots\ + B_1\, p + B_0)}$, l'ordre du système est c+n et la classe est c. c représente le nombre d'intégrateur dans la fonction transfert.
- La racine du numérateur sont appelées « zéro ».
  Un système est dit dérivateur lorsqu'il possède un zéro en p=0.

1.5.3 REPRESENTATION DE LA TRANSMITTANCE SUR UN SCHEMA FONCTIONNEL

1.5.3.1 Le principe



$S(p) = H(p)\, E(p)$

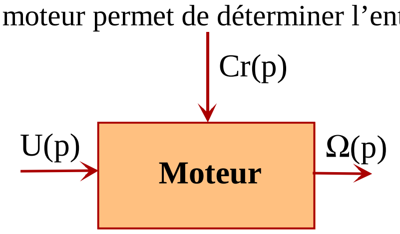
1.5.3.2 Des équations au schéma bloc

Reprenons les équations du moteur à courant continu développer au « 1.3.2..1.1.Notion de point d'étude un système automatisé ou conditions de Heaviside » de ce document.

1. $U(p) - E(p) = (Lp + R)I(p)$
2. $E(p) = Ke.\Omega(p)$
3. $Cm(p) - Cr(p) = (Jp + f).\Omega(p)$
4. $Cm(p) = Kt.I(p)$

Étape 1

Le schéma fonctionnel du moteur permet de déterminer l'entrée et la sortie du système.



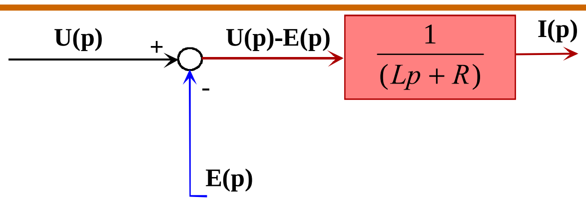
Cr(p) représente le couple récepteur modélisé ici en perturbation car souvent inconnu précisément.

Étape 2

U(p) intervient dans l'équation 1 : $U(p) - E(p) = (Lp + R)I(p)$, elle se met sous la forme :

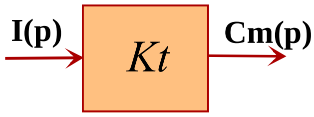
$$[U(p) - E(p)].\frac{1}{(Lp + R)} = I(p)$$

Il vient donc naturellement :



Étape 3

I(p) intervient dans l'équation 4 : $Cm(p) = Kt.I(p)$. Il vient donc naturellement :

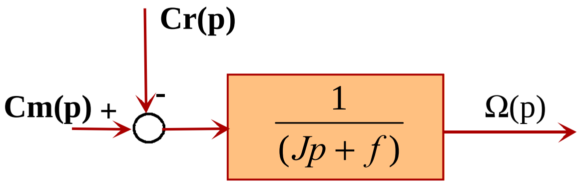


Étape 4

Cm(p) intervient dans l'équation 3 : $Cm(p) - Cr(p) = (Jp + f).\Omega(p)$, elle se met sous la forme :

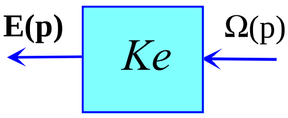
$$[Cm(p) - Cr(p)].\frac{1}{(Jp+f)} = .\Omega(p)$$

Il vient donc naturellement :



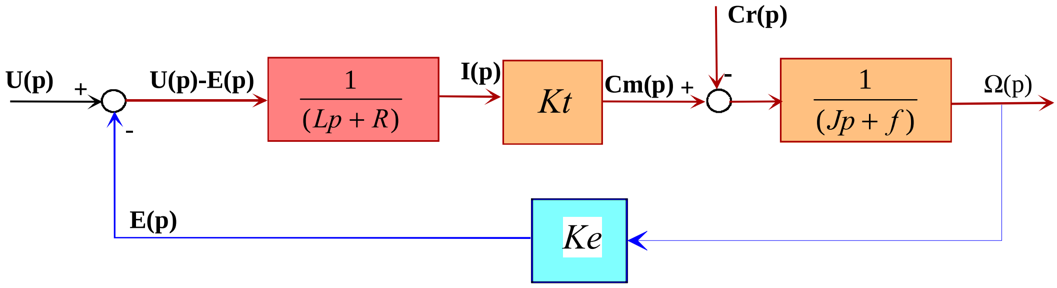
Étape 5

$\Omega(p)$ intervient dans l'équation 2 : $E(p) = Ke.\Omega(p)$. Il vient donc naturellement :



Étape 6

Par assemblage des schémas traduisant les équations 1, 2, 3 et 4, on obtient le schéma bloc suivant :



Remarque : un schéma bloc est un outil graphique de représentation d'un système d'équations.

1.5.3.3 Recherche d'une fonction transfert à partir d'un schéma bloc

On se propose ici de rechercher le modèle mathématique du moteur dont le schéma bloc est donné ci-dessus. Pour se faire, on utilise le principe de superposition.

1- Dans un premier temps, on recherche $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$ **en posant *Cr(p)=0*.**

Le schéma bloc devient :