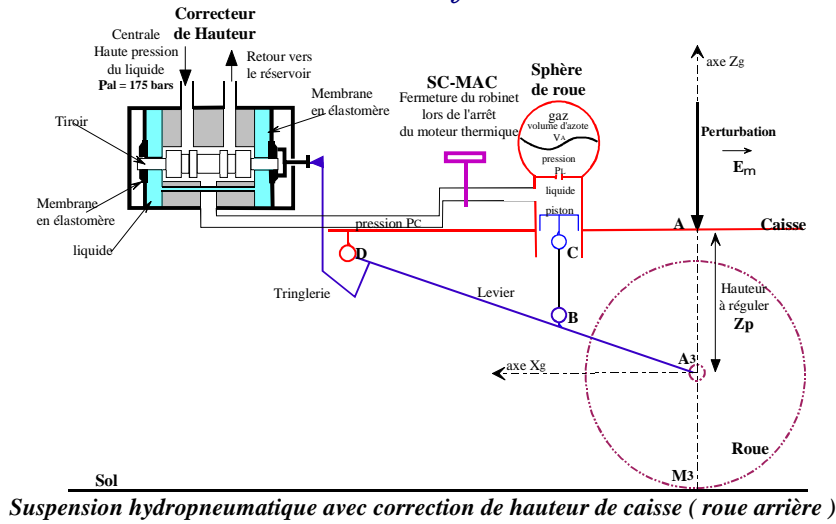


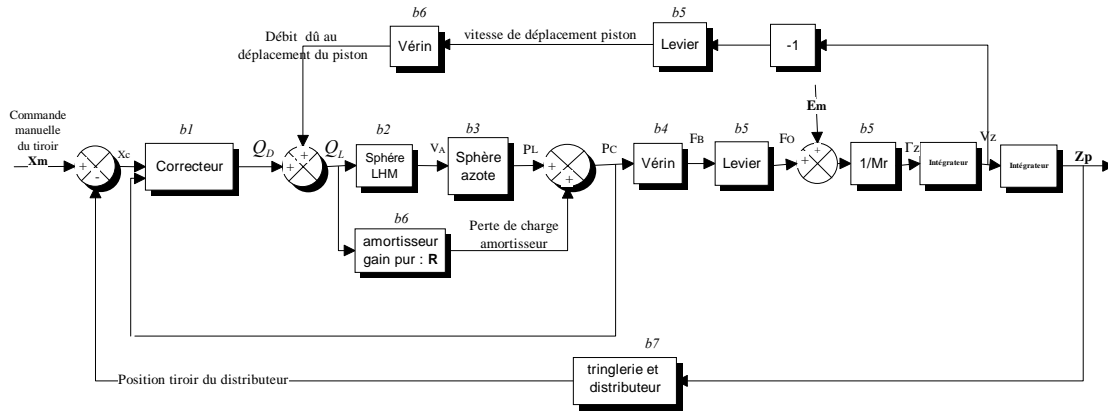


Automatique : Transformée de Laplace  
Cours (1<sup>ère</sup> partie)

LES SYSTEMES AUTOMATISES  
Transformées de Laplace - Calcul symbolique  
Modèle transfert



Le schéma fonctionnel



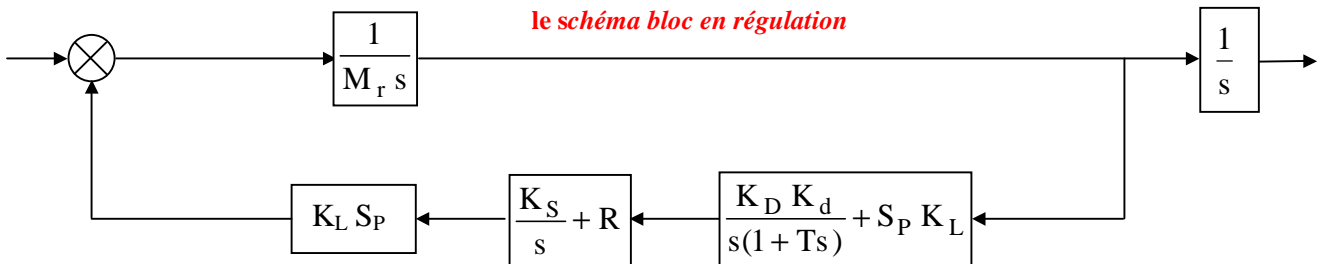
Em : Perturbation  
VA : Volume d'azote dans la sphère de roue  
PL : Pression du liquide dans la sphère de roue  
PC : Pression du liquide dans le circuit hydraulique

Zp : Position de la caisse / axe de la roue  
QD : Débit du liquide à la sortie du correcteur  
QL : Débit du liquide entrant dans la sphère de roue  
FO : Projection sur z<sub>g</sub> de l'effort de la roue sur le levier au point O  
FB : Projection sur z<sub>g</sub> de l'effort du levier sur la biellette BC au point B

Schéma

fonctionnel de la suspension hydro-pneumatique avec correction de hauteur de caisse

le schéma bloc en régulation



En régulation, la fonction de transfert de la suspension hydrodynamique en mode ferme s'écrit :

$$H_r(s) = \frac{1}{MrTs^4 + (Mr + KL^2SP^2RT)s^3 + (KL^2SP^2(R + KST))s^2 + (KLSP(RKdKD + KLSPKS))s + KLKS Kd KD SP}$$

**Automatique : Transformée de Laplace**  
**Cours (1<sup>ère</sup> partie)**

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

1.1	Définitions.....	3
1.1.1	Fonction causale.....	3
1.1.2	Fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside).....	3
1.1.3	Transformée de Laplace monolatérale (ou classique).....	3
1.2	Calcul des transformées usuelles.....	4
1.2.1	Échelon unité.....	4
1.2.2	Rampe unitaire.....	4
1.2.3	Impulsion physique (ou créneau) de surface unité.....	5
1.2.4	VI.2.4 Impulsion de Dirac unitaire.....	5
1.2.5	Fonction exponentielle.....	6
1.2.6	Fonction sinus.....	6
1.2.7	Tableau des transformées usuelles.....	7
1.3	Propriétés de la transformée de Laplace.....	8
1.3.1	Superposition linéaire.....	8
1.3.2	Dérivation.....	8
1.3.3	Intégration.....	11
1.3.4	Dérivation et intégration pratique dans le domaine de Laplace.....	12
1.3.5	Théorème de la valeur finale.....	12
1.3.6	Théorème de la valeur initiale.....	12
1.3.7	Théorème du retard.....	12

\*\*\*\*\*

# TRANSFORMEE DE LAPLACE. CALCUL SYMBOLIQUE. MODELE TRANSFERT.

## 1.1 Définitions.

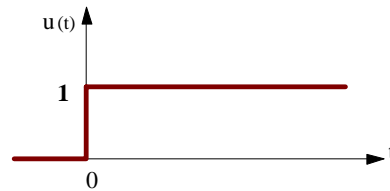
### 1.1.1 FONCTION CAUSALE

On appelle ainsi une fonction  $u(t)$  pour laquelle :  $u(t) = 0 ; \forall t < 0$ .

Dans la suite du document, nous utiliserons exclusivement des fonctions causales.

### 1.1.2 FONCTION ECHELON UNITE (OU FONCTION DE HEAVISIDE)

- $\forall t < 0 ; u(t) = 0$
- $\forall t > 0 ; u(t) = 1$



**Remarque :**

Dans ce qui suit on ne s'intéressera pas à la fonction  $\sin(\omega t)$ , par exemple, mais à la fonction causale  $\sin(\omega t) \cdot u(t)$  :

$$\sin(\omega t) u(t) = 0, \quad \forall t < 0 \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) u(t) = \sin(\omega t), \quad \forall t > 0$$

### 1.1.3 TRANSFORMEE DE LAPLACE MONOLATERALE (OU CLASSIQUE)

On appelle transformée de Laplace  $\mathcal{L}$  mono latérale (si elle existe) d'une fonction  $f(t)$  causale, la fonction :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

avec la variable  $p$  complexe,  $p = \sigma + i \omega$

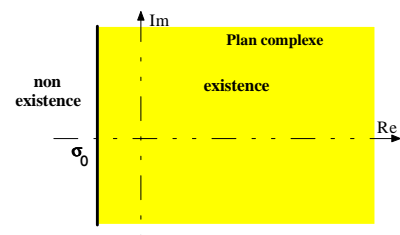
**Remarques :**

On n'exposera pas les conditions d'existence de la transformée, remarquons seulement que :

- $f(t)$  doit être d'ordre exponentiel, c'est à dire majorable à l'infini par des exponentielles.
- à  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$  correspond un nombre réel  $\sigma_0$  appelé abscisse de convergence de  $f$ , tel que :

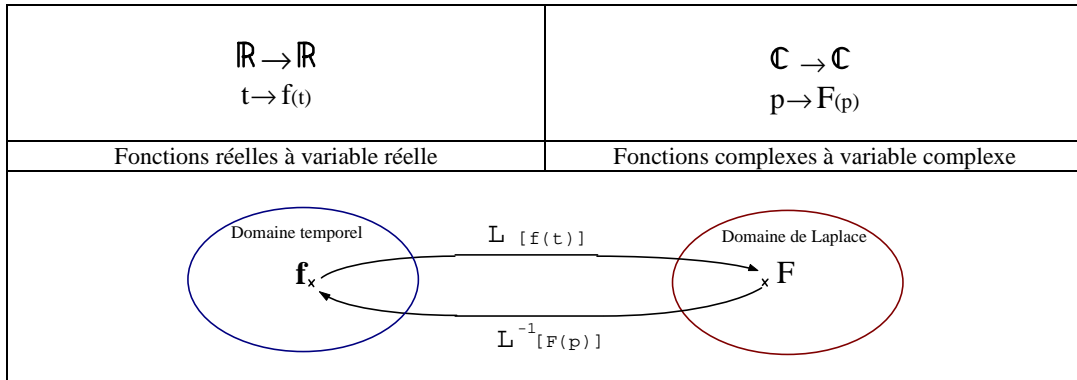
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) \text{ existe si } \text{Re}(p) = \sigma > \sigma_0$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) \text{ n'existe pas si } \text{Re}(p) = \sigma < \sigma_0$$



**Automatique : Transformée de Laplace**  
**Cours (1<sup>ère</sup> partie)**

- La correspondance entre  $f(t)$  et  $F(p)$  est biunivoque.



**1.2 Calcul des transformées usuelles.**

**1.2.1 ÉCHELON UNITE**

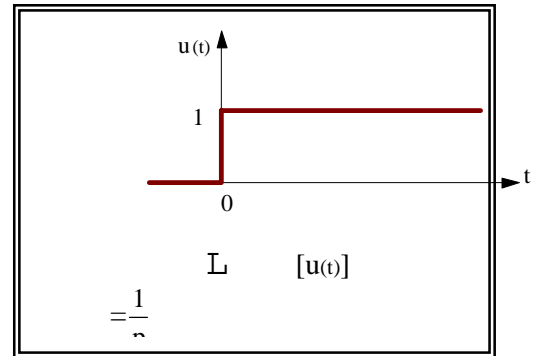
$$u(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

$$u(t) = 1, \quad \forall t > 0$$

$$\mathcal{L} [u(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt} dt$$

$$\mathcal{L} [u(t)] = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-pt}}{p} \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{e^{-pt}}{p} \right)$$

$$\mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{p}$$



**1.2.2 RAMPE UNITAIRE**

$$f(t) = t u(t)$$

$$\mathcal{L} [f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} t e^{-pt} dt$$

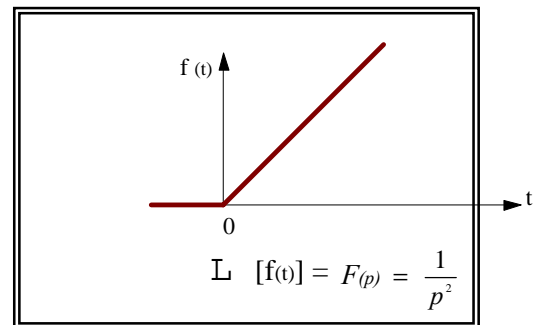
En intégrant par partie

$$U = t$$

$$\frac{dU}{dt} = 1$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-pt}$$

$$V = -\frac{e^{-pt}}{p}$$



$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dUV}{dt} dt = \int_{0^+}^{\infty} U \frac{dV}{dt} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dU}{dt} V dt$$

$$\left[ -t \frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{\infty} = F(p) + \int_{0^+}^{\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} dt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( -t \frac{e^{-pt}}{p} \right) - 0 = F(p) + \left[ \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_{0^+}^{\infty}$$

$$0 - 0 = F(p) - \frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2}$$

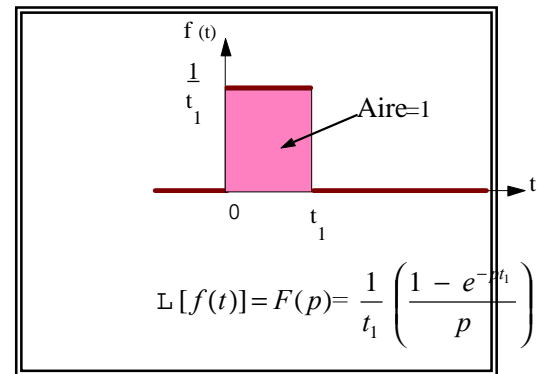
1.2.3 IMPULSION PHYSIQUE (OU CRENEAU) DE SURFACE UNITE

$f(t) = \frac{1}{t_1}$  si  $t \in ]0, t_1[$ ,  $f(t) = 0$  si  $t \notin [0, t_1]$

$$\mathcal{L} [f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{t_1} \frac{1}{t_1} e^{-pt} dt$$

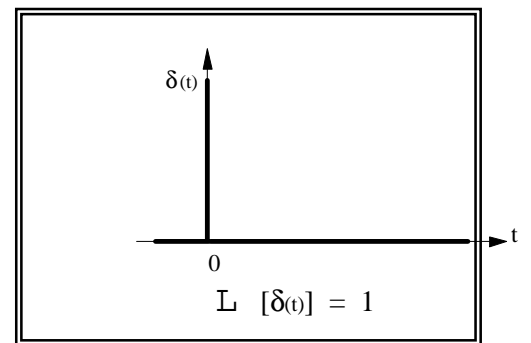
$$= \frac{1}{t_1} \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{t_1} = \frac{1}{t_1} \left( \frac{e^{-pt_1}}{p} + \frac{1}{p} \right)$$

$$F(p) = \frac{1}{t_1} \left( \frac{1 - e^{-pt_1}}{p} \right)$$



1.2.4 VI.2.4 IMPULSION DE DIRAC UNITAIRE

On définit l'impulsion de Dirac unitaire en faisant tendre  $t_1$  vers 0 dans le créneau unitaire. Cela revient à générer une amplitude infinie pendant un temps nul, ce qui ne correspond évidemment à aucun signal physique réel, mais cette fonction peut être utile dans l'analyse théorique du comportement temporel d'un système.



**Remarque :** si pour piloter un système automatique, lors du calcul par le modèle, on démontre qu'il est nécessaire d'envoyer un Dirac, il sera nécessaire de modifier l'automatisme (le schéma bloc). Un Dirac est impossible à réaliser avec précision.

$$\mathcal{L} [\delta(t)] = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-pt_1}}{pt_1} \right)$$

Avec le développement limité :  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$