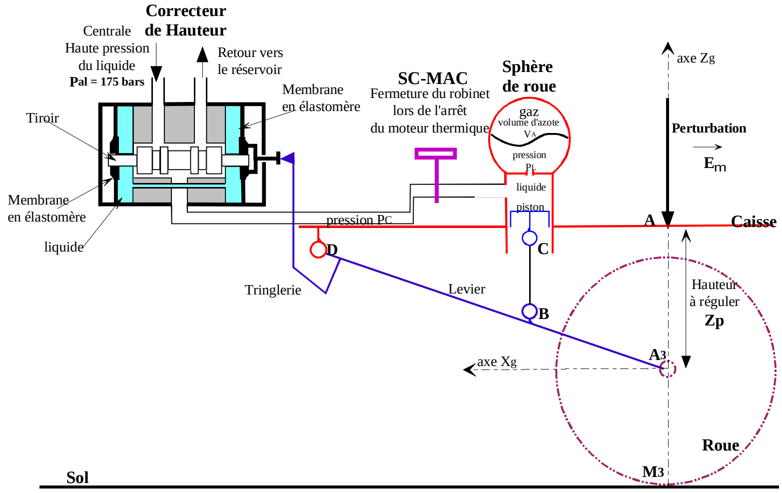
Automatique : Transformée de Laplace

Cours (1ère partie)

LES SYSTEMES AUTOMATISES

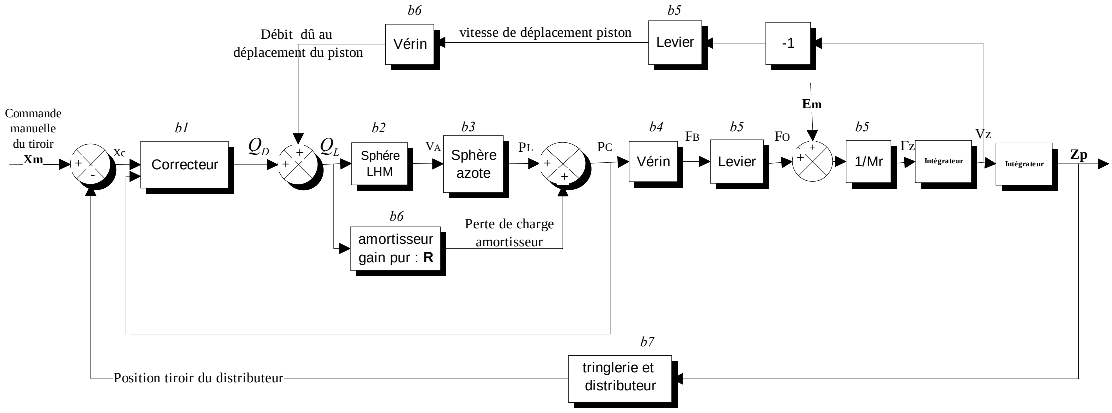
Transformées de Laplace - Calcul symbolique

Modèle transfert



Suspension hydropneumatique avec correction de hauteur de caisse (roue arrière)

Le schéma fonctionnel

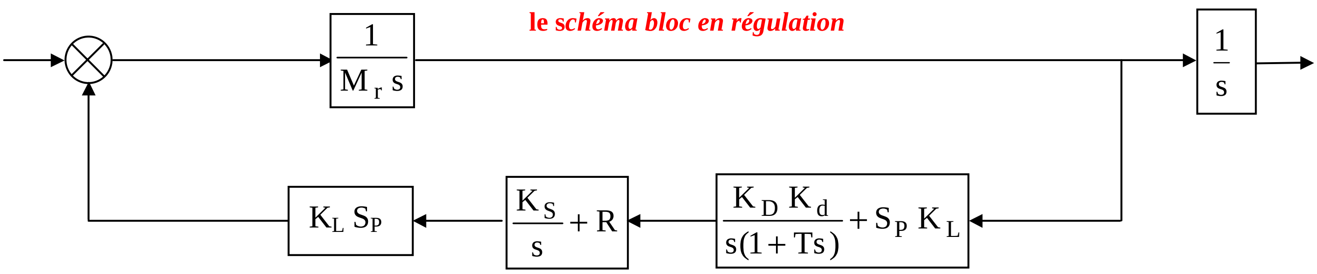


Em : Perturbation
VA : Volume d'azote dans la sphère de roue
PL : Pression du liquide dans la sphère de roue
PC : Pression du liquide dans le circuit hydraulique

Zp : Position de la caisse / axe de la roue
QD : Débit du liquide à la sortie du correcteur
QL : Débit du liquide entrant dans la sphère de roue
FO : Projection sur z_g de l'effort de la roue sur le levier au point O
FB : Projection sur z_g de l'effort du levier sur la biellette BC au point B

Schéma fonctionnel de la suspension hydropneumatique avec correction de hauteur de caisse

le schéma bloc en régulation



En régulation, *la fonction de transfert* de la suspension hydrodynamique en mode ferme s'écrit :

$$H_r(s) = \frac{s(Ts+1)}{MrTs^4 + (Mr + KL^2\,SP^2\,R\,T)s^3 + (KL^2\,SP^2\,(R + KS\,T))s^2 + (KL\,SP\,(R\,Kd\,KD + KL\,SP\,KS))s + KL\,KS\,Kd\,KD\,SP}$$

Automatique : Transformée de Laplace

Cours (1ère partie)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

TRANSFORMEE DE LAPLACE. CALCUL SYMBOLIQUE. MODELE TRANSFERT.

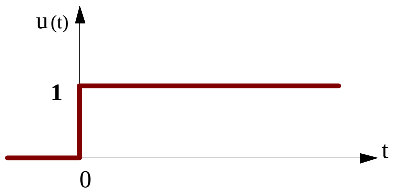
1.1 Définitions.

1.1.1 FONCTION CAUSALE

On appelle ainsi une fonction u(t) pour laquelle : $u(t) = 0$; $\forall\, t < 0$.
Dans la suite du document, nous utiliserons exclusivement des fonctions causales.

1.1.2 FONCTION ECHELON UNITE (OU FONCTION DE HEAVISIDE)

- $\forall\, t < 0$; $u(t) = 0$
- $\forall\, t > 0$; $u(t) = 1$



Remarque :

Dans ce qui suit on ne s'intéressera pas à la fonction $\sin(\omega t)$, par exemple, mais à la fonction causale $\sin(\omega t).u(t)$:

$$\sin(\omega\, t)\; u_{(t)} = 0, \qquad \forall\, t < 0 \;\text{ et } \qquad \sin(\omega\, t)\; u_{(t)} = \sin(\omega\, t), \quad \forall\, t > 0$$

1.1.3 TRANSFORMEE DE LAPLACE MONOLATERALE (OU CLASSIQUE)

On appelle transformée de Laplace L mono latérale (si elle existe) d'une fonction $f_{(t)}$ causale, la fonction :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

avec la variable p complexe, $p = \sigma + i\,\omega$

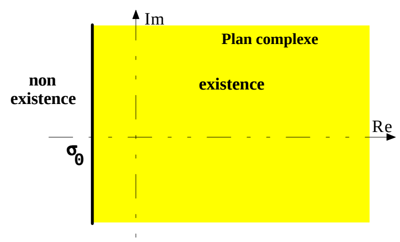
Remarques :

On n'exposera pas les conditions d'existence de la transformée, remarquons seulement que :

- $f_{(t)}$ doit être d'ordre exponentiel, c'est à dire majorable à l'infini par des exponentielles.
- à L $[f_{(t)}] = F_{(p)} = \int_{0^+}^{+\infty} f_{(t)}\, e^{-pt}\, dt$ correspond un nombre réel σ_0 appelé abscisse de convergence de f, tel que :

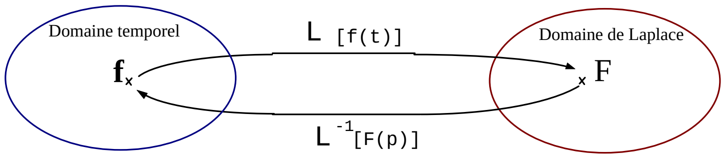
L $[f_{(t)}] = F_{(p)}$ existe si $\quad \mathrm{Re}(p) = \sigma > \sigma_0$

L $[f_{(t)}] = F_{(p)}$ n'existe pas si $\quad \mathrm{Re}(p) = \sigma < \sigma_0$



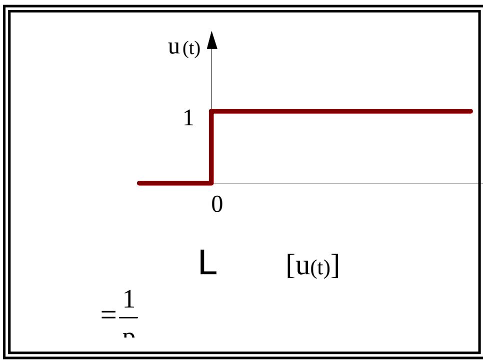
- La correspondance entre f(t) et F(p) est biunivoque.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \rightarrow f(t)$	$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $p \rightarrow F(p)$
Fonctions réelles à variable réelle	Fonctions complexes à variable complexe



1.2 Calcul des transformées usuelles.

1.2.1 ÉCHELON UNITE



$u(t) = 0, \quad \forall\, t < 0$

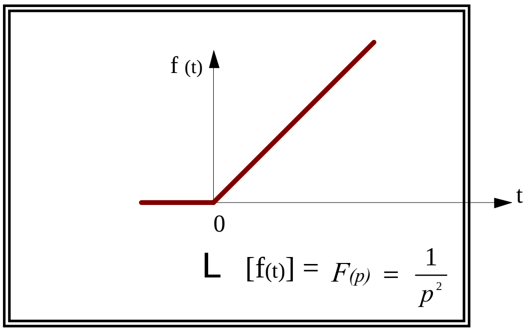
$u(t) = 1, \quad \forall\, t > 0$

$$\mathcal{L}\,[u(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

$$\mathcal{L}\,[u(t)] = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^+}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right) - \lim_{t\to 0}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)$$

$$\mathcal{L}\,[u(t)] = \frac{1}{p}$$

1.2.2 RAMPE UNITAIRE



$f(t) = t\,u(t)$

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} t\,e^{-pt}\,dt$$

En intégrant par partie

$$U = t \qquad \frac{dU}{dt} = 1$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-pt} \qquad V = -\frac{e^{-pt}}{p}$$

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dUV}{dt}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} U\,\frac{dV}{dt}\,dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dU}{dt}\,V\,dt$$

$$\left[-\,t\,\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^+}^{\infty} = F_{(p)} + \int_{0^+}^{\infty} -\frac{1}{p}\,e^{-pt}\,dt$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-t\,\frac{e^{-pt}}{p}\right) - 0 = F_{(p)} + \left[\frac{1}{p^2}\,e^{-pt}\right]_{0^+}^{\infty}$$

$$0 - 0 = F_{(p)} - \frac{1}{p^2}$$

$$F_{(p)} = \frac{1}{p^2}$$

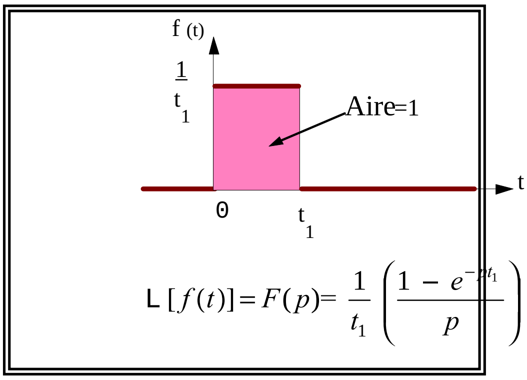
1.2.3 IMPULSION PHYSIQUE (OU CRENEAU) DE SURFACE UNITE

$f_{(t)} = \dfrac{1}{t_1}$ si $t \in \,]\,0, t_1[$, $f_{(t)} = 0$ si $t \notin [\,0, t_1]$

$$\mathcal{L}\,[f_{(t)}] = F_{(p)} = \int_{0^+}^{t_1} \frac{1}{t_1}\,e^{-pt}\,dt$$

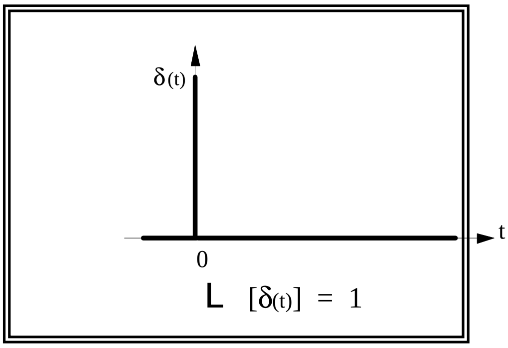
$$= \frac{1}{t_1}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^+}^{t_1} = \frac{1}{t_1}\left(\frac{e^{-pt_1}}{p} + \frac{1}{p}\right)$$

$$F(p) = \frac{1}{t_1}\left(\frac{1 - e^{-pt_1}}{p}\right)$$



1.2.4 VI.2.4 IMPULSION DE DIRAC UNITAIRE

On définit l'impulsion de Dirac unitaire en faisant tendre t_1 vers 0 dans le créneau unitaire. Cela revient à générer une amplitude infinie pendant un temps nul, ce qui ne correspond évidemment à aucun signal physique réel, mais cette fonction peut être utile dans l'analyse théorique du comportement temporel d'un système.



Remarque : *si pour piloter un système automatique, lors du calcul par le modèle, on démontre qu'il est nécessaire d'envoyer un Dirac, il sera nécessaire de modifier l'automatisme (le schéma bloc). Un Dirac est impossible à réaliser avec précision.*

$$\mathcal{L}\,[\delta_{(t)}] = \lim_{t_1\to 0}\left(\frac{1 - e^{-pt_1}}{pt_1}\right)$$

Avec le développement limité : $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$