

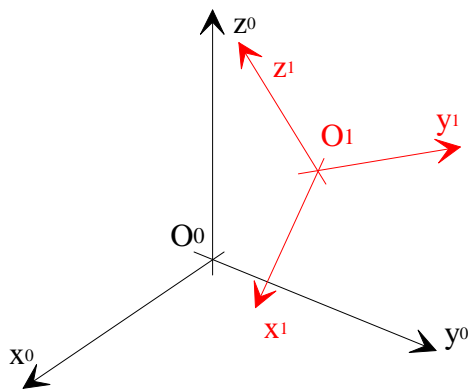


## DERIVEE VECTORIELLE

### SOMMAIRE

<b>1. DERIVEE VECTORIELLE.....</b>	<b>1</b>
1.1. NAISSANCE DU VECTEUR ROTATION .....	1
1.1.1. <i>Le problème</i> .....	1
1.1.2. <i>Résolution</i> :.....	1
1.1.3. <i>Unicité de <math>\vec{\Omega}_{R1/R0}</math></i> .....	3
1.1.4. <i>Calcul de <math>\vec{\Omega}_{R1/R0}</math> pour une rotation autour d'un axe <math>(A, \vec{z}_{10})</math></i> .....	3
1.2. DERIVEE VECTORIELLE D'UN VECTEUR UNITAIRE .....	6
1.3. DERIVATION D'UNE FONCTION VECTORIELLE QUELCONQUE $\vec{U}(t)$ .....	6
1.4. LES SAVOIRS INDISPENSABLES SUR LA DERIVEE VECTORIELLE.....	7
1.4.1. <i>Dérivée d'un vecteur unitaire</i> .....	7
1.4.2. <i>Dérivée d'une fonction vectorielle</i> .....	7
1.4.3. <i>Valeur du vecteur rotation <math>\vec{\Omega}_{R1/R0}</math> dans un mouvement en rotation autour de l'axe <math>(A, \vec{z}_{10})</math></i> .	7

### 1. DERIVEE VECTORIELLE.



repère  $\mathfrak{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Soient :

- $\mathfrak{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère affine de base orthonormée directe  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère affine de base orthonormée directe  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $R_1$  est en mouvement par rapport à  $R_0$ .

#### 1.1. Naissance du vecteur rotation

##### 1.1.1. Le problème

L'objectif ici, est de déterminer les dérivées des vecteurs  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$  par rapport au temps t, dans le

Ces dérivées seront notées :  $\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}$ ,  $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0}$  et  $\left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0}$ .

##### 1.1.2. Résolution :

**Les données :**  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est une base orthonormée directe. D'où :

- la condition 1 :  $\|\vec{x}_1\| = \vec{x}_1^2 = 1$ ,  $\|\vec{y}_1\| = \vec{y}_1^2 = 1$ ,  $\|\vec{z}_1\| = \vec{z}_1^2 = 1$
- la condition 2 :  $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = 0$ ,  $\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0$ ,  $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0$

En utilisant la condition 1, on obtient par dérivation dans  $\mathfrak{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\begin{cases} \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = r \vec{y}_1 + s \vec{z}_1 \\ \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = p \vec{z}_1 + t \vec{x}_1 \\ \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = q \vec{x}_1 + u \vec{y}_1 \end{cases} \text{ où } p, q, r, s, t, u \text{ sont des réels}$$

En utilisant la condition 2, on obtient par dérivation dans  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\begin{cases} \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \\ \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 + \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + r = 0 \\ u + p = 0 \\ s + q = 0 \end{cases}$$

les dérivées  $\left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0}$ ,  $\left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0}$  et  $\left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$  s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = r \vec{y}_1 - q \vec{z}_1 \\ \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = p \vec{z}_1 - r \vec{x}_1 \\ \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = q \vec{x}_1 - p \vec{y}_1 \end{cases}$$

On peut donc mettre ce résultat sous la forme :

$$\begin{cases} \left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} r & 0 \\ r & 0 \end{vmatrix} = 0 = r \vec{y}_1 - q \vec{z}_1 = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{x}_1 \\ \left( \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} r & 0 \\ r & 0 \end{vmatrix} = 0 = p \vec{z}_1 - r \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{y}_1 \\ \left( \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} r & 1 \\ r & 1 \end{vmatrix} = 0 = q \vec{x}_1 - p \vec{y}_1 = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{z}_1 \end{cases} \text{ où } \vec{\Omega}_{R_1/R_0} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1$$