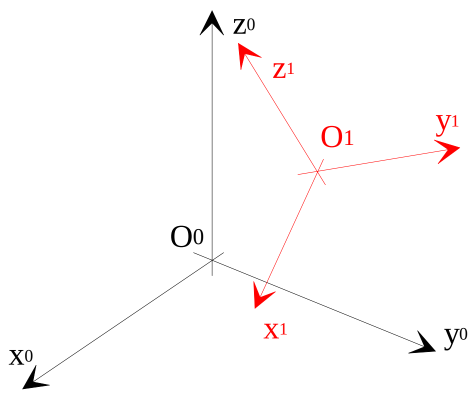
DERIVEE VECTORIELLE

SOMMAIRE

1. DERIVEE VECTORIELLE.



Soient :

- $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et $\Re_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$
- **R**$_1$ est en mouvement par rapport à **R**$_0$.

1.1. Naissance du vecteur rotation

1.1.1. Le problème

L'objectif ici, est de déterminer les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1$ par rapport au temps t, dans le repère $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

Ces dérivée seront notées : $\left(\dfrac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0}$, $\left(\dfrac{d\,\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0}$ et $\left(\dfrac{d\,\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0}$.

1.1.2. Résolution :

Les données : $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est une base orthonormée directe. D'où :

- la condition 1 : $\|\vec{x}_1\| = \vec{x}_1^{\,2} = 1,\quad \|\vec{y}_1\| = \vec{y}_1^{\,2} = 1,\quad \|\vec{z}_1\| = \vec{z}_1^{\,2} = 1$
- la condition 2 : $\vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0,\quad \vec{x}_1.\vec{z}_1 = 0,\quad \vec{y}_1.\vec{z}_1 = 0$

En utilisant la condition 1, on obtient par dérivation dans $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} = r\,\vec{y}_1 + s\,\vec{z}_1 \\ \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0} = p\,\vec{z}_1 + t\,\vec{x}_1 \quad \text{où } p,q,r,s,t,u \text{ sont des réels} \\ \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0} = q\,\vec{x}_1 + u\,\vec{y}_1 \end{cases}$$

En utilisant la condition 2, on obtient par dérivation dans $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \\ \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{z}_1 + \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + r = 0 \\ u + p = 0 \\ s + q = 0 \end{cases}$$

les dérivées $\left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0}$, $\left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0}$ et $\left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0}$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} = r\,\vec{y}_1 - q\,\vec{z}_1 \\ \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R0} = p\,\vec{z}_1 - r\,\vec{x}_1 \\ \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R0} = q\,\vec{x}_1 - p\,\vec{y}_1 \end{cases}$$

On peut donc mettre ce résultat sous la forme :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = r\vec{y}_1 - q\vec{z}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{x}_1 \\ \left(\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = p\vec{z}_1 - r\vec{x}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{y}_1 \qquad \text{où } \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = p\vec{x}_1 + q\vec{y}_1 + r\vec{z}_1 \\ \left(\dfrac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{R_1} = q\vec{x}_1 - p\vec{y}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{z}_1 \end{cases}$$