TD outils utiles en mécanique

EXERCICE 1:

Soit le repère vectoriel $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $(\vec{V},\vec{X},\vec{W})$ trois vecteurs non nuls.

Si on a l'égalité suivante $\vec{V}\wedge\vec{X}=\vec{W}$;

rechercher l'équation vectorielle donnant $\vec{X}$ en fonction de $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

EXERCICE 2 :

Soit le repère vectoriel $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $\left[\vec{V}1,\vec{V}2,\vec{V}3\right]$ trois vecteurs quelconques non nuls, rechercher l'égalité suivante en explicitant le résultats trouvés.

$\left[(\vec{V}1\wedge\vec{V}2).\vec{V}3\right].\vec{V}3.(\vec{V}1\wedge\vec{V}3)=?$

EXERCICE 3 :

Soit un torseur

$$T=\ \mathrm{T}=\begin{Bmatrix}\vec{S}\\ \vec{\mathrm{M}}(A)\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}S_x, & S_y, & S_z\\ \mathrm{M}_x(A), & \mathrm{M}_y(A), & \mathrm{M}_z(A)\end{Bmatrix}_{A,\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}}=\begin{Bmatrix}1 & 2,3\\ -3,3,-1\end{Bmatrix}_{A,\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

et R un repère vectoriel de base orthonormée directe $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Soient les coordonnées de A et B dans R, A(0,0,0) et B(1,0,0) :

3-1- Montrer que le moment sur l'axe central de T1 est égal au vecteur nul.

3-2- Ecrire le torseur T1 en B

3-3- Rechercher un point I tel que le moment en I $\vec{M}_I=\vec{0}$.

3-4 donner l'équation paramétrée de l'axe central du torseur T1.

EXERCICE 4 :

Soit un torseur $T=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \omega & 0\end{Bmatrix}_{A,\ \vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1}$ et R1 un repère vectoriel de base orthonormée directe $R1(,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$

Soient les coordonnées de A et B dans R, A(0,0,0) et B(r,0,0) où ω et r sont des réels.

4-1- Ecrire le torseur T2 en B

4-2 Donner l'axe central du torseur T2.

4-3 Donner une interprétation réel modélisée par le torseur T.

TD Corrigé : outils utiles en mécanique

EXERCICE 1:

$\vec{V}$ et $\vec{W}$ étant deux vecteurs connus non nuls , existe-t-il un vecteur $\vec{X}$ tel que :

$\vec{V} \wedge \vec{X} = \vec{W}$

on en conclut :

$\vec{X}$ doit être non nul,

$\vec{V}$ et $\vec{W}$ doivent être orthogonaux et $\vec{X}$ et $\vec{W}$ aussi par propriété du produit vectoriel..

Si il existe une solution $\vec{X}$, alors tout vecteur de la forme $\vec{X} + \lambda\vec{V}$ sera aussi solution.

En multipliant vectoriellement par $\vec{V}$ la relation $\vec{V} \wedge \vec{X} = \vec{W}$, on obtient :

$\vec{V} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{X}) = \vec{V} \wedge \vec{W}$ ou bien $(\vec{V}.\vec{X})\,\vec{V} - (\vec{V}.\vec{V})\,\vec{X} = \vec{V} \wedge \vec{W}$

où $(\vec{V}.\vec{X})$ est réel β

Si on cherche la solution particulière $\vec{X}_0$ (β = 0) orthogonale à $\vec{V}$, on obtient :

$$\vec{X}_0 = \frac{-\vec{V} \wedge \vec{W}}{V^2} \quad \text{et} \quad \vec{X} = \frac{-\vec{V} \wedge \vec{W}}{V^2} + \lambda\vec{V}$$

EXERCICE 2 :

le résultats est 0 réel. Puisque $\vec{V}3.(\vec{V}1 \wedge \vec{V}3) = 0$

EXERCICE 3 :

3-1 : L'automoment du torseur T : $\vec{\mathrm{M}}(A).\vec{S} = 0$ donc le torseur T un torseur de type glisseur et sur tous les points de l'axe d'un torseur Glisseur le moment est nul.

3-2 :

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \quad \text{et } \vec{\mathrm{M}}(B) = \vec{\mathrm{M}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S} \text{ d'ou le calcul : } \vec{\mathrm{M}}(B) = \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}_R + \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix}_R$$

d'où le torseur en B :

$$\boxed{T = \begin{Bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \\ 3 & -3 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}}$$

Remarque : **l'automoment du torseur est toujours égal à 0. Normal, puisque l'automoment est un invariant scalaire du champs antisymétrique représenté par le torseur T.**

3-3 :

$$\vec{\mathrm{M}}(A) = \vec{\mathrm{M}}(I) + \overrightarrow{AI} \wedge \vec{S} \text{ d'ou le calcul : } \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R + \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}_R$$

x,y,z sont les coordonnées de I dans le repère $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.