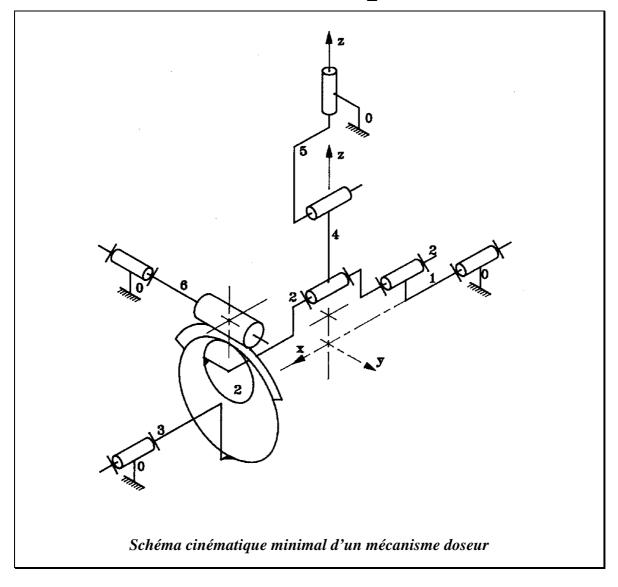
Cours Calcul vectoriel

PCSI-PSI Cours

Sciences de l'ingénieur

Les Outils nécessaires en **Mécanique**



Page 1 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU © EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Calcul vectoriel Cours

Sommaire

| Outils n | ecessaires en mecanique | 3 |
|----------|--|----|
| | PERATIONS SUR LES VECTEURS | |
| 1.1.1 | Produit scalaire | 3 |
| 1.1.1 | .1 Définition du produit scalaire : | 3 |
| 1.1.1 | .2 Définition de la norme géométrique | 3 |
| 1.1.1 | .3 Interprétation géométrique du produit scalaire : | 3 |
| 1.1.2 | Produit vectoriel | 3 |
| 1.1.2 | 2.1 Définition du produit vectorielle | 3 |
| 1.1.2 | 2.2 Interprétation géométrique du produit scalaire : | 3 |
| 1.1.3 | Produit mixte | 4 |
| 1.1.3 | 3.1 Définition du produit mixte | 4 |
| 1.1.3 | 3.2 Interprétation géométrique du produit mixte : | 4 |
| 1.1.4 | Double produit vectoriel | 4 |
| 1.1.5 | Division vectorielle | 4 |
| | 5.1 Le problème : | |
| 1.2 AP | PLICATIONS ANTISYMÉTRIQUES | 5 |
| 1.2.1 | Définition | 5 |
| | Propriétés | |
| 1.3 CH | IAMP DE VECTEURS | 5 |
| 1.3.1 | Définition | 5 |
| 1.3.2 | Champ antisymétrique | 5 |
| | Champ équiprojectif | |
| 1.3.4 | Théorème de DELASSUS | 6 |
| | ORSEURS | |
| 1.4.1 | Définition d'un torseur | 7 |
| 1.4.2 | Notation d'un torseur | 7 |
| 1.4.3 | Changement de point | 7 |
| 1.4.4 | Torseur nul | 7 |
| 1.4.5 | Somme de deux torseurs | |
| 1.4.6 | Multiplication par un scalaire | 8 |
| 1.4.7 | Comoment de deux torseurs | 8 |
| 1.4.8 | Automoment d'un torseur | 9 |
| 1.4.9 | Axe central d'un torseur | 9 |
| 1.4.10 | 1 | |
| | 0.1 Torseur Glisseur | |
| 1.4.1 | 0.2 Torseur Couple | 10 |
| 1.4.11 | Décomposition d'un torseur | |
| 1.4.12 | Interprétation Géométrique d'un torseur | 11 |

Cours Calcul vectoriel

1 OUTILS NECESSAIRES EN MECANIQUE

1.1 OPERATIONS SUR LES VECTEURS

E est un espace vectoriel de dimension 3.

Soient trois vecteurs de E³ : $\overrightarrow{V}_{1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1, \overrightarrow{V}_{2} = \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2, \overrightarrow{V}_{3} = \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ et une base orthonormée directe $b \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$

 $b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On définit les opérations suivantes :

1.1.1 PRODUIT SCALAIRE

1.1.1.1 Définition du produit scalaire :

Le produit scalaire est une application linéaire définie positive de E² dans R 'réel tel que le produit scalaire est défini et noté :

$$(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

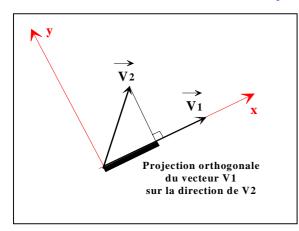
1.1.1.2 Définition de la norme géométrique

La norme géométrique d'un vecteur est définie et notée :

$$\overrightarrow{\|V_1\|} = \sqrt{\overrightarrow{V_1,V_1}} = \sqrt{\overrightarrow{V_1,V_1}} = \sqrt{\overrightarrow{V_1}^2} = \sqrt{x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1}$$

Cette norme représente graphiquement la longueur en mètre du vecteur $\overrightarrow{V_1}$. La norme géométrique est définie positive.

1.1.1.3 Interprétation géométrique du produit scalaire :



Soit la représentation plane dans le plan vectoriel (x,y)

$$(\overrightarrow{V}_{1}, \overrightarrow{V}_{2}) = \overrightarrow{V}_{1}, \overrightarrow{V}_{2} = x_{1}x_{2} + y_{1}y_{2} + z_{1}z_{2} = \|\overrightarrow{V}_{1}\|\|\overrightarrow{V}_{2}\|\cos(\overrightarrow{V}_{1}, \overrightarrow{V}_{2})$$

Si $\vec{V}_1 = \vec{x}$ c'est-à-dire que $||\vec{V}_1|| = 1$ alors, $\vec{V}_1 = \vec{x}$ représente la projection orthogonale du vecteur \vec{V}_2 sur la direction de \vec{V}_1 .

Cas de nullité du produit scalaire :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont orthogonaux.

1.1.2 PRODUIT VECTORIEL

1.1.2.1 Définition du produit vectorielle

Le produit vectoriel est une application linéaire antisymétrique de E^2 dans E tel que le produit vectoriel est défini et noté :

$$(\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2) = (x_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{x} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{y} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{z}$$

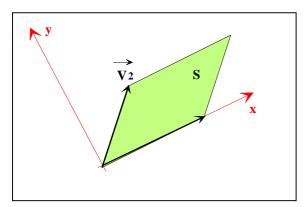
1.1.2.2 Interprétation géométrique du produit scalaire :

Page 3 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU © EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Cours Calcul vectoriel

Soit la représentation plane dans le plan vectoriel (\vec{x}, \vec{y})



 $(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = |\overrightarrow{V_1}| ||\overrightarrow{V_2}| \sin(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) \overrightarrow{n}$, avec \overrightarrow{n} vecteur unitaire directement perpendiculaire à $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$.

Cas de nullité du produit vectoriel :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont colinéaires.

1.1.3 PRODUIT MIXTE

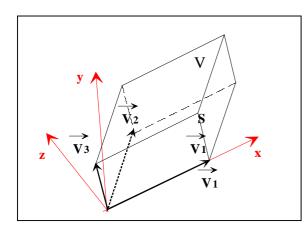
1.1.3.1 Définition du produit mixte

Le produit mixte est une application linéaire antisymétrique de E³ dans R « réel » tel que le produit mixte est défini et noté :

$$(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{V_3} = (\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}) \cdot \overrightarrow{V_2} = (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) \cdot \overrightarrow{V_1}$$

Le produit mixte de trois vecteurs est un scalaire invariant par permutation circulaire des vecteurs ou par inversion des opérations.

1.1.3.2 Interprétation géométrique du produit mixte :



 $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = (\vec{V_1} \land \vec{V_2}) \cdot \vec{V_3}$ représente graphiquement le volume du parallélépipède de cotés définis par les vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$)

Cas de nullité du produit mixte :

- l'un des vecteurs est nul,
- deux des vecteurs sont colinéaires,
- les trois vecteurs sont coplanaires.

1.1.4 DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

 $\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$ est un vecteur perpendiculaire à $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$. Il se trouve donc dans le plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ et peut s'écrire alors : $\lambda \overrightarrow{V_2} + \mu \overrightarrow{V_3}$ avec $(\lambda, \mu) \in R^2$.

Par identification on obtient:

$$\overrightarrow{V}_{1} \wedge (\overrightarrow{V}_{2} \wedge \overrightarrow{V}_{3}) = (\overrightarrow{V}_{1} \cdot \overrightarrow{V}_{3}) \overrightarrow{V}_{2} - (\overrightarrow{V}_{1} \cdot \overrightarrow{V}_{2}) \overrightarrow{V}_{3}$$

1.1.5 DIVISION VECTORIELLE

1.1.5.1 Le problème :

Page 4 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU © EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.