PCSI-PSI **Cours**

Sciences de l'ingénieur

Les Outils nécessaires en
Mécanique

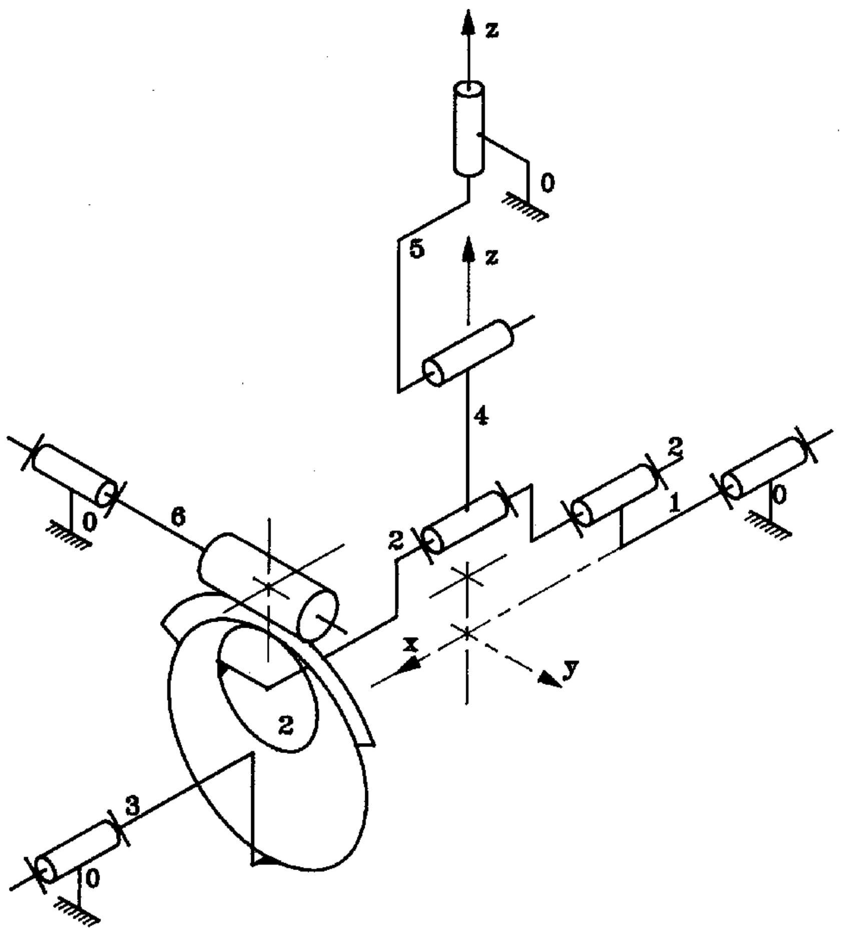


Schéma cinématique minimal d'un mécanisme doseur

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

Sommaire

 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

1 OUTILS NECESSAIRES EN MECANIQUE

1.1 OPERATIONS SUR LES VECTEURS

E est un espace vectoriel de dimension 3.

Soient trois vecteurs de E^3 : $\vec{V}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_b$, $\vec{V}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_b$, $\vec{V}_3 = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}_b$ et une base orthonormée directe $b(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

On définit les opérations suivantes :

1.1.1 PRODUIT SCALAIRE

1.1.1.1 Définition du produit scalaire :

Le produit scalaire est une application linéaire définie positive de E² dans R ‘réel tel que le produit scalaire est défini et noté :

$$\boxed{(\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

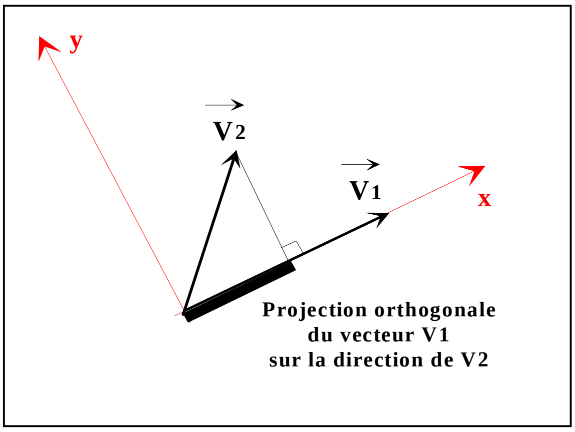
1.1.1.2 Définition de la norme géométrique

La norme géométrique d’un vecteur est définie et notée :

$$\boxed{\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(\vec{V}_1,\vec{V}_1)} = \sqrt{\vec{V}_1.\vec{V}_1} = \sqrt{\vec{V}_1^2} = \sqrt{x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1}}$$

Cette norme représente graphiquement la longueur en mètre du vecteur $\vec{V}_1$. La norme géométrique est définie positive.

1.1.1.3 Interprétation géométrique du produit scalaire :



Soit la représentation plane dans le plan vectoriel $(\vec{x},\vec{y})$

$$(\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$$

Si $\vec{V}_1 = \vec{x}$ c’est-à-dire que $\|\vec{V}_1\| = 1$ alors, $\vec{V}_1.\vec{x}$ représente la projection orthogonale du vecteur $\vec{V}_2$ sur la direction de $\vec{V}_1$.

Cas de nullité du produit scalaire :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont orthogonaux.

1.1.2 PRODUIT VECTORIEL

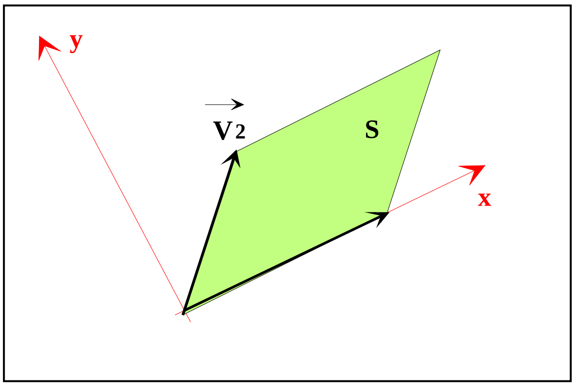
1.1.2.1 Définition du produit vectorielle

Le produit vectoriel est une application linéaire antisymétrique de E² dans E tel que le produit vectoriel est défini et noté :

$$\boxed{(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (x_1z_2 - y_2z_1)\,\vec{x} + (z_1x_2 - z_2x_1)\,\vec{y} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\vec{z}}$$

1.1.2.2 Interprétation géométrique du produit scalaire :

Soit la représentation plane dans le plan vectoriel $(\vec{x},\vec{y})$



$(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \|\vec{V_1}\| \|\vec{V_2}\| \sin(\vec{V_1},\vec{V_2})\,\vec{n}$, avec $\vec{n}$ vecteur unitaire directement perpendiculaire à $(\vec{V_1},\vec{V_2})$.

La norme du produit vectoriel $\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\| = \|\vec{V_1}\| \|\vec{V_2}\| \sin(\vec{V_1},\vec{V_2})$ représente la surface S du parallélogramme défini par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$) .

Cas de nullité du produit vectoriel :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont colinéaires.

1.1.3 Produit mixte

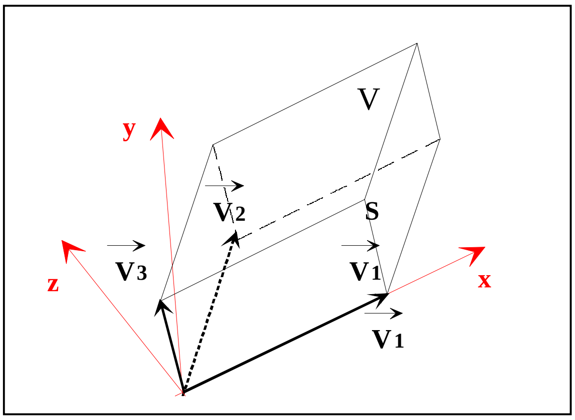
1.1.3.1 Définition du produit mixte

Le produit mixte est une application linéaire antisymétrique de E^3 dans R « réel » tel que le produit mixte est défini et noté :

$$\boxed{(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}) = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}).\vec{V_3} = (\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}).\vec{V_2} = (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}).\vec{V_1}}$$

Le produit mixte de trois vecteurs est un scalaire invariant par permutation circulaire des vecteurs ou par inversion des opérations.

1.1.3.2 Interprétation géométrique du produit mixte :



$(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}) = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}).\vec{V_3}$ représente graphiquement le volume du parallélépipède de cotés définis par les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$)

Cas de nullité du produit mixte :

- l'un des vecteurs est nul,
- deux des vecteurs sont colinéaires,
- les trois vecteurs sont coplanaires.

1.1.4 Double produit vectoriel

$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$ est un vecteur perpendiculaire à $(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$. Il se trouve donc dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ et peut s'écrire alors : $\lambda\vec{V_2} + \mu\vec{V_3}$ avec $(\lambda,\mu) \in R^2$.

Par identification on obtient :

$$\boxed{\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = (\vec{V_1}.\vec{V_3})\,\vec{V_2} - (\vec{V_1}.\vec{V_2})\,\vec{V_3}}$$

1.1.5 Division vectorielle

1.1.5.1 Le problème :