

PCSI-PSI

Cours

Sciences de l'ingénieur

## Les Outils nécessaires en Mécanique

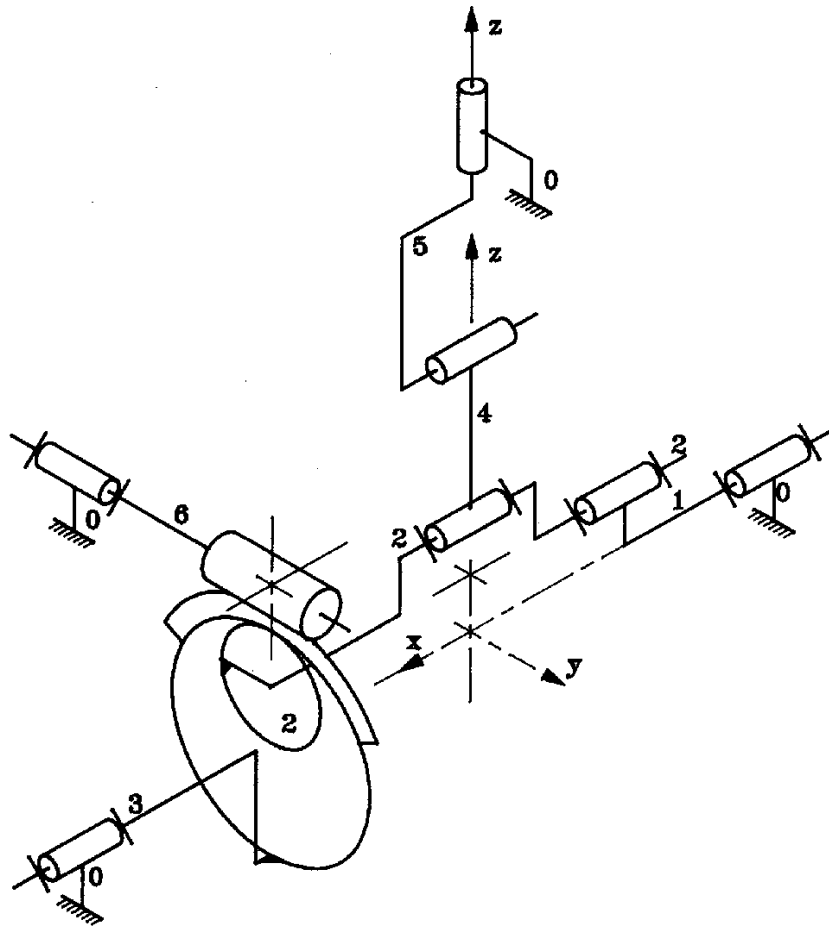


Schéma cinématique minimal d'un mécanisme doseur

## Sommaire

1	Outils nécessaires en mécanique .....	3
1.1	OPERATIONS SUR LES VECTEURS .....	3
1.1.1	Produit scalaire .....	3
1.1.1.1	Définition du produit scalaire : .....	3
1.1.1.2	Définition de la norme géométrique .....	3
1.1.1.3	Interprétation géométrique du produit scalaire : .....	3
1.1.2	Produit vectoriel.....	3
1.1.2.1	Définition du produit vectorielle .....	3
1.1.2.2	Interprétation géométrique du produit scalaire : .....	3
1.1.3	Produit mixte.....	4
1.1.3.1	Définition du produit mixte .....	4
1.1.3.2	Interprétation géométrique du produit mixte : .....	4
1.1.4	Double produit vectoriel .....	4
1.1.5	Division vectorielle.....	4
1.1.5.1	Le problème : .....	4
1.2	APPLICATIONS ANTISYMETRIQUES.....	5
1.2.1	Définition .....	5
1.2.2	Propriétés .....	5
1.3	CHAMP DE VECTEURS .....	5
1.3.1	Définition .....	5
1.3.2	Champ antisymétrique .....	5
1.3.3	Champ équiprojectif.....	5
1.3.4	Théorème de DELASSUS .....	6
1.4	TORSEURS.....	7
1.4.1	Définition d'un torseur.....	7
1.4.2	Notation d'un torseur .....	7
1.4.3	Changement de point .....	7
1.4.4	Torseur nul .....	7
1.4.5	Somme de deux torseurs .....	7
1.4.6	Multiplication par un scalaire .....	8
1.4.7	Comoment de deux torseurs.....	8
1.4.8	Automoment d'un torseur.....	9
1.4.9	Axe central d'un torseur .....	9
1.4.10	Torseurs particuliers .....	9
1.4.10.1	Torseur Glisseur.....	9
1.4.10.2	Torseur Couple .....	10
1.4.11	Décomposition d'un torseur .....	10
1.4.12	Interprétation Géométrique d'un torseur .....	11

# 1 OUTILS NECESSAIRES EN MECANIQUE

## 1.1 OPERATIONS SUR LES VECTEURS

$E$  est un espace vectoriel de dimension 3.

Soient trois vecteurs de  $E^3$  :  $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$  et une base orthonormée directe  $b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

On définit les opérations suivantes :

### 1.1.1 PRODUIT SCALAIRE

#### 1.1.1.1 Définition du produit scalaire :

Le produit scalaire est une application linéaire définie positive de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  'réel tel que le produit scalaire est défini et noté :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

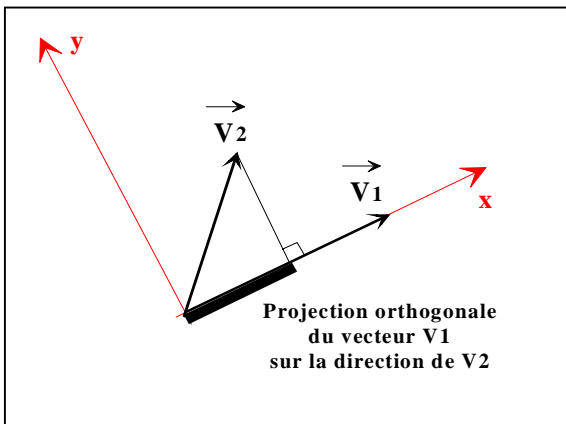
#### 1.1.1.2 Définition de la norme géométrique

La norme géométrique d'un vecteur est définie et notée :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(\vec{V}_1, \vec{V}_1)} = \sqrt{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1} = \sqrt{V_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Cette norme représente graphiquement la longueur en mètre du vecteur  $\vec{V}_1$ . La norme géométrique est définie positive.

#### 1.1.1.3 Interprétation géométrique du produit scalaire :



Soit la représentation plane dans le plan vectoriel  $(\vec{x}, \vec{y})$

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Si  $\vec{V}_1 = \vec{x}$  c'est-à-dire que  $\|\vec{V}_1\| = 1$  alors,  $\vec{V}_1 \cdot \vec{x}$  représente la projection orthogonale du vecteur  $\vec{V}_2$  sur la direction de  $\vec{V}_1$ .

Cas de nullité du produit scalaire :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont orthogonaux.

### 1.1.2 PRODUIT VECTORIEL

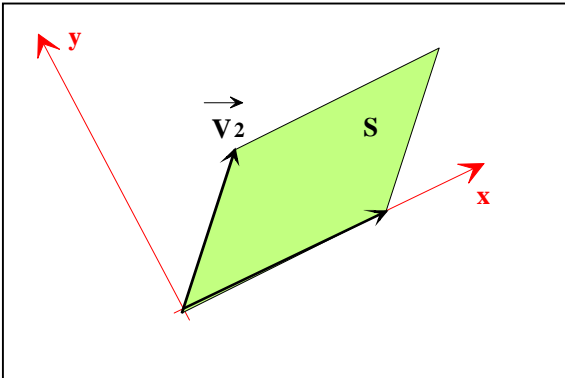
#### 1.1.2.1 Définition du produit vectorielle

Le produit vectoriel est une application linéaire antisymétrique de  $E^2$  dans  $E$  tel que le produit vectoriel est défini et noté :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (x_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{x} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{y} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{z}$$

#### 1.1.2.2 Interprétation géométrique du produit scalaire :

Soit la représentation plane dans le plan vectoriel  $(\vec{x}, \vec{y})$



$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \vec{n}$ , avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire directement perpendiculaire à  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ .

La norme du produit vectoriel  $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  représente la surface S du parallélogramme défini par  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

Cas de nullité du produit vectoriel :

- l'un des vecteurs est nul,
- les deux vecteurs sont colinéaires.

### 1.1.3 PRODUIT MIXTE

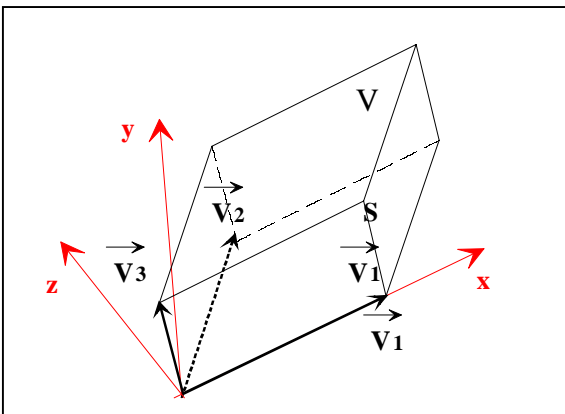
#### 1.1.3.1 Définition du produit mixte

Le produit mixte est une application linéaire antisymétrique de  $E^3$  dans  $\mathbb{R}$  « réel » tel que le produit mixte est défini et noté :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1$$

Le produit mixte de trois vecteurs est un scalaire invariant par permutation circulaire des vecteurs ou par inversion des opérations.

#### 1.1.3.2 Interprétation géométrique du produit mixte :



$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$  représente graphiquement le volume du parallélépipède de cotés définis par les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$

Cas de nullité du produit mixte :

- l'un des vecteurs est nul,
- deux des vecteurs sont colinéaires,
- les trois vecteurs sont coplanaires.

### 1.1.4 DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$  est un vecteur perpendiculaire à  $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ . Il se trouve donc dans le plan formé par les vecteurs  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  et peut s'écrire alors :  $\lambda \vec{V}_2 + \mu \vec{V}_3$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Par identification on obtient :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3$$

### 1.1.5 DIVISION VECTORIELLE

#### 1.1.5.1 Le problème :