CINETIQUE
DES SYSTEMES MATERIELS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

1 CONSERVATION DE LA MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL EN MECANIQUE CLASSIQUE

1.1 Système matériel de solides

1.1.1 SOLIDE INDEFORMABLE

Comme nous l'avons vu en Cinématique, un solide indéformable S est un ensemble de points tels que la distance de deux quelconques de ces points reste constante au cours du mouvement du solide.

$$\boxed{\forall A \in S, \forall B \in S, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = c^{ste}}$$

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

1.1.2 SYSTEME MATERIEL DE SOLIDES $E=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$

En Dynamique, nous étudierons principalement le comportement des systèmes matériels de solides modélisables par des mécanismes à chaînes simples ou complexes, ouvertes ou fermées.

Les solides sont considérés comme indéformables. Les liaisons reliant les solides sont considérées comme réelles (éventuellement avec frottement).

1.2 Masse d'un système matériel E

1.2.1 DEFINITION

A toute partie $E_i(t)$ du système matériel E(t), on associe une mesure positive et additive notée $m[E_i(t)]$ telle que :

$$m[E_i(t)]\geq 0$$

$$m[E_i(t)\cup E_j(t)]=m[E_i(t)]+m[E_j(t)] \quad \text{avec} \quad E_i(t)\cap E_j(t)=\varnothing$$

$$m[E(t)]=\int_{E(t)} dm$$

1.2.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R tel que $E(t)=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle définie pour tout point P de E(t) tel que : $P(t)\rightarrow\vec{\varphi}[P(t)]$ alors on démontre que :

$$\int_{E(t)}\vec{\varphi}[P(t)]\,dm=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\vec{\varphi}[P(t)]\,dm \qquad (1)$$

1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique

1.3.1 SYSTEME MATERIEL FERME

La masse d'un système matériel fermé est constante au cours du temps .

$$\frac{d[m(E(t))]}{dt}=0\Rightarrow m(E(t))=m(E)=C^{te}$$

1.3.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R .

Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle continûment dérivable par rapport à t, définie pour tout point P de E(t), on démontre que:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{E(t)}\vec{\varphi}[P(t)]dm\right]_R=\int_{E(t)}\left[\frac{d}{dt}\vec{\varphi}[P(t)]\right]_R dm \qquad (2)$$

2 CENTRE D’INERTIE D’UN SYSTEME MATERIEL

2.1 *Définition*

Soit E(t) la configuration, à l’instant t, du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

Le centre d’inertie du système matériel E, noté G, est donné par la relation :

$$\boxed{\int_{E(t)} \overrightarrow{GP}\,dm = \vec{0} \qquad (3)}$$

2.2 *Détermination directe de G*

2.2.1 EXISTENCE DE G

Posons $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG}$ où A désigne un point quelconque, d'après (3) on a :

$$\int_{E(t)} \overrightarrow{AP}\,dm = \int_{E(t)} \overrightarrow{AG}\,dm$$

or $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG}$ est indépendant de m et t, donc :

$$\int_{E(t)} \overrightarrow{AP}\,dm = \overrightarrow{AG} \int_{E(t)} dm$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \overrightarrow{AP}\,dm \qquad (4)}$$

2.2.2 UNICITE DE G

Soient G_1 et G_2 deux points vérifiant la relation (4)

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \overrightarrow{AP}\,dm$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \overrightarrow{AP}\,dm$$

d’où

$$\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AG_2} = \vec{0}$$

donc

$$\boxed{G_1 \equiv G_2 \equiv G}$$

2.3 *Détermination pratique du centre d’inertie d’un système matériel E*

2.3.1 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

On a donc

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

et

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(S_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

si G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i
si m_i désigne la masse du solide S_i
D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\,dm$$

D'après (1)

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{S_i} \vec{AP}\,dm \right]}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

donc

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{AG_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (5)}$$

G est donc le barycentre de tous les points G_i affectés des masses m_i

2.3.2 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

2.3.2.1 Définition

D'après (4)

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m(S)} \int_{S(t)} \vec{AP}\,dm}$$

Si on pose $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

on a $\vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

et $AP = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

il vient:

$$\boxed{x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} \quad y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} \quad z_G = \frac{\int_{E(t)} z\,dm}{m} \qquad (6)}$$

2.3.2.2 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique su centre d'inertie d'un solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

Si xAy est plan de symétrie du solide S, alors :

$$z_G = \frac{\int_{E(t)} z\,dm}{m} = 0$$

Si xAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

Si yAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

Si (A,z) est axe de symétrie de révolution, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

3 TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE *R*

3.1 Définition

On appelle torseur cinétique, au point A, du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*, le torseur noté $\{C(E/R)\}_A$ défini par :

$$\{C(E/R)\} = \begin{cases} \vec{R}_C(E/R) = \vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm \\ \vec{\sigma}(A, E/R) = \int_{E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \end{cases} \quad (8)$$

le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est la résultante cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

le vecteur $\vec{\sigma}(A, E/R)$ est le moment cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

Vérifions que $\{C(E/R)\}$ *est bien un torseur*.

Calculons $\vec{\sigma}(B, E/R)$, B étant un point quelconque.

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(P/R)dm + \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P \in E(t)} \vec{V}(P/R)dm + \vec{\sigma}(A, E/R)$$

d'après (6)

soit

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{\sigma}(A, E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}(E/R) \quad (9)$$

$\{C(E/R)\}$ *est donc bien un torseur.*

3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$

3.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{P}(E/R)$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm$$

si O est un point fixe dans R,

$$\vec{P}(E/R) = \int_E \left[\frac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R dm$$

d'après (2),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[\int_E \vec{OP}dm\right]_R$$

d'après (4),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[m\vec{OG}\right]_R$$

d'après (2),

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (10)}$$

où m désigne la masse du système matériel E
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

3.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{P}(E/R)$

3.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{P}(S/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (11)}$$

où m désigne la masse du solide S
G désigne le centre d'inertie du solide S

3.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides S_i

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm$$

d'où

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i} \vec{V}(P/R)dm\right]$$

donc

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}(G_i/R) \qquad (12)}$$

où m_i désigne la masse du solide S_i
G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

Remarque: Le vecteur $\vec{P}(E/R)$ *est aussi appelé vecteur quantité de mouvement du système matériel E en mouvement par rapport au repère R.*

3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R

3.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

$$\vec{\sigma}(A,E/R)=\int_{E(t)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm$$

d'après (1)

$$\vec{\sigma}(A,E/R)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm\right]$$

soit

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,E/R)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\sigma}(A,S_i/R) \qquad (13)}$$

où

$\vec{\sigma}(A,S_i/R)$ désigne le moment cinétique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport à R.

3.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

3.3.2.1 Calcul direct de $\vec{\sigma}(A,S/R)$

Ce calcul s'effectue en tenant compte des points suivants :
A désigne le point quelconque où est calculé $\vec{\sigma}(A,S/R)$. *A peut être fixe ou mobile dans R..*
B désigne un point particulier de S et P désigne un point courant de S.

$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm$ $\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{V}(B,S/R)+\overrightarrow{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]dm$ B et P appartenant à S

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(B,S/R)dm+\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\left[\overrightarrow{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$

or $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$
donc :

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AP}\,dm\wedge\vec{V}(B,S/R)+\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\left[\overrightarrow{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$
$$+\int_S\overrightarrow{BP}\wedge\left[\overrightarrow{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\sigma}(A,S/R)&=m\,\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(B/R)+m\,\overrightarrow{AB}\wedge\left[\overrightarrow{GB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]\\&+\int_S\overrightarrow{BP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{BP}\right]dm\end{aligned} \qquad (14)}$$

Remarque: Bien que la relation (14) donne l'expression du vecteur $\vec{\sigma}(A,S/R)$, *ce dernier n'est jamais calculé par la relation (14). Dans la pratique, on calcule* $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *grâce aux trois cas particuliers détaillés ci dessous.*

3.3.2.2 **Calcul pratique de** $\vec{\sigma}(A,S/R)$

- *Si B est confondu avec A*

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R) = m\,\overrightarrow{AG}\wedge \vec{V}(A/R) + \int_S \overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \qquad (15)}$$

- ***Si B est confondu avec A fixe dans R***

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est fixe dans R et est, de plus, le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \qquad (16)}$$

- ***Si B est confondu avec G centre d'inertie de S***

Le centre d'inertie G est le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{\sigma}(A,S/R) = \vec{\sigma}(G,S/R) + m\,\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(G/R)\\ &\vec{\sigma}(G,S/R) = \int_S \overrightarrow{GP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{GP}\right]dm\end{aligned} \qquad (17)}$$

3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S

3.4.1 DEFINITION

Les expressions (15), (16) et (17) montrent l'existence de l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

$$\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R)) = \int_S \overrightarrow{BP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{BP}\right]dm$$

Si on pose :

$R_S = (B,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ repère lié à S et,

$B_S = (\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ base associée à R_S.

On peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) = p\vec{x}_S + q\vec{y}_S + r\vec{z}_S$$

$$\overrightarrow{BP} = x\vec{x}_S + y\vec{y}_S + z\vec{z}_S$$