



CINETIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

1	Conservation de la masse d'un système matériel en mécanique classique	1
1.1	Système matériel de solides.....	1
1.2	Masse d'un système matériel E	2
1.3	Principe de conservation de la masse en mécanique classique	2
2	Centre d'inertie d'un système matériel.....	3
2.1	Définition.....	3
2.2	Détermination directe de G	3
2.3	Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E.....	3
3	Torseur cinétique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R.....	6
3.1	Définition.....	6
3.2	Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$	6
3.3	Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R	8
3.4	Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S	9
3.5	Théorème de Huyghens	12
3.6	Moments d'inertie particuliers	16
4	Energie cinétique d'un système matériel E, en mouvement par rapport à un repère R.....	18
4.1	Définition.....	18
4.2	Calcul de l'énergie cinétique du système matériel E, en mouvement relativement au repère R..	18
5	Torseur dynamique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R	20
5.1	Définition.....	20
5.2	Calcul de la résultante dynamique $\vec{R}_d(E/R)$	21
5.3	Calcul du moment dynamique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R	22

1 CONSERVATION DE LA MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL EN MECANIQUE CLASSIQUE

1.1 *Système matériel de solides*

1.1.1 SOLIDE INDEFORMABLE

Comme nous l'avons vu en Cinématique, un solide indéformable S est un ensemble de points tels que la distance de deux quelconques de ces points reste constante au cours du mouvement du solide.

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \|\vec{AB}\| = c^{ste}$$

1.1.2 SYSTEME MATERIEL DE SOLIDES $E = \bigcup_{i=1}^n S_i$

En Dynamique, nous étudierons principalement le comportement des systèmes matériels de solides modélisables par des mécanismes à chaînes simples ou complexes, ouvertes ou fermées.

Les solides sont considérés comme indéformables. Les liaisons reliant les solides sont considérées comme réelles (éventuellement avec frottement).

1.2 Masse d'un système matériel E

1.2.1 DEFINITION

A toute partie $E_i(t)$ du système matériel $E(t)$, on associe une mesure positive et additive notée $m[E_i(t)]$ telle que :

$$m[E_i(t)] \geq 0$$

$$m[E_i(t) \cup E_j(t)] = m[E_i(t)] + m[E_j(t)] \quad \text{avec} \quad E_i(t) \cap E_j(t) = \emptyset$$

$$m[E(t)] = \int_{E(t)} dm$$

1.2.2 CONSEQUENCE

Soit $E(t)$ un système matériel en mouvement par rapport à un repère R tel que $E(t) = \bigcup_{i=1}^n S_i$. Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle définie pour tout point P de $E(t)$ tel que : $P(t) \rightarrow \vec{\varphi}[P(t)]$ alors on démontre que :

$$\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)] dm = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \vec{\varphi}[P(t)] dm \quad (1)$$

1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique

1.3.1 SYSTEME MATERIEL FERME

La masse d'un système matériel fermé est constante au cours du temps .

$$\frac{d[m(E(t))]}{dt} = 0 \Rightarrow m(E(t)) = m(E) = C^{te}$$

1.3.2 CONSEQUENCE

Soit $E(t)$ un système matériel en mouvement par rapport à un repère R .

Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle continûment dérivable par rapport à t , définie pour tout point P de $E(t)$, on démontre que:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)] dm \right]_R = \int_{E(t)} \left[\frac{d}{dt} \vec{\varphi}[P(t)] \right]_R dm \quad (2)$$

2 CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

2.1 Définition

Soit $E(t)$ la configuration, à l'instant t , du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R .

Le centre d'inertie du système matériel E , noté G , est donné par la relation :

$$\int_{E(t)} \vec{GP} \, dm = \vec{0} \quad (3)$$

2.2 Détermination directe de G

2.2.1 EXISTENCE DE G

Posons $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ où A désigne un point quelconque, d'après (3) on a :

$$\int_{E(t)} \vec{AP} \, dm = \int_{E(t)} \vec{AG} \, dm$$

or $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ est indépendant de m et t , donc :

$$\int_{E(t)} \vec{AP} \, dm = \vec{AG} \int_{E(t)} dm$$

soit

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm \quad (4)$$

2.2.2 UNICITE DE G

Soient G_1 et G_2 deux points vérifiant la relation (4)

$$\vec{AG}_1 = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm$$

$$\vec{AG}_2 = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm$$

d'où

$$\vec{AG}_1 - \vec{AG}_2 = \vec{0}$$

donc

$$G_1 \equiv G_2 \equiv G$$

2.3 Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E

2.3.1 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

On a donc

$$E = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

et

$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(S_i) = \sum_{i=1}^n m_i$$

si G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

si m_i désigne la masse du solide S_i

D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} dm$$

D'après (1)

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\int_{S_i} \vec{AP} dm \right]}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

donc

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5)$$

G est donc le barycentre de tous les points G_i affectés des masses m_i

2.3.2 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

2.3.2.1 Définition

D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(S)} \int_{S(t)} \vec{AP} dm$$

Si on pose $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

on a $\vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

et $AP = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

il vient:

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x dm}{m} \quad y_G = \frac{\int_{E(t)} y dm}{m} \quad z_G = \frac{\int_{E(t)} z dm}{m} \quad (6)$$

2.3.2.2 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique du centre d'inertie d'un solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

Si xAy est plan de symétrie du solide S , alors :

$$z_G = \frac{\int z dm}{m} = 0$$

Si xAz est plan de symétrie du solide S , alors :

$$y_G = \frac{\int y dm}{m} = 0$$

Si yAz est plan de symétrie du solide S , alors :

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = 0$$

Si (A,z) est axe de symétrie de révolution, alors :

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = 0$$

$$y_G = \frac{\int y dm}{m} = 0$$

3 TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE R

3.1 Définition

On appelle torseur cinétique, au point A, du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R, le torseur noté $\{C(E/R)\}_A$ défini par :

$$\{C(E/R)\} = \begin{cases} \vec{R}_c(E/R) = \vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm \\ \vec{\sigma}(A, E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \end{cases} \quad (8)$$

le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est la résultante cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R.

le vecteur $\vec{\sigma}(A, E/R)$ est le moment cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R.

Vérifions que $\{C(E/R)\}$ est bien un torseur.

Calculons $\vec{\sigma}(B, E/R)$, B étant un point quelconque.

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \vec{BP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \vec{BA} \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{BA} \wedge \int_{P \in E(t)} \vec{V}(P/R) dm + \vec{\sigma}(A, E/R)$$

d'après (6)

soit

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{\sigma}(A, E/R) + \vec{BA} \wedge \vec{P}(E/R) \quad (9)$$

$\{C(E/R)\}$ est donc bien un torseur.

3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$

3.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{P}(E/R)$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm$$

si O est un point fixe dans R,

$$\vec{P}(E/R) = \int_E \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R dm$$

d'après (2),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt} \left[\int_E \vec{OP} dm \right]_R$$

d'après (4),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt} \left[m \vec{OG} \right]_R$$

d'après (2),

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = m \vec{V}(G/R)} \quad (10)$$

où m désigne la masse du système matériel E
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

3.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{P}(E/R)$

3.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{P}(S/R) = m \vec{V}(G/R)} \quad (11)$$

où m désigne la masse du solide S
G désigne le centre d'inertie du solide S

3.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides S_i

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm$$

d'où

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n \left[\int_{S_i} \vec{V}(P/R) dm \right]$$

donc

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{P}(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(G_i/R)} \quad (12)$$

où m_i désigne la masse du solide S_i
 G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

Remarque: Le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est aussi appelé vecteur quantité de mouvement du système matériel E en mouvement par rapport au repère R.

3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R

3.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

d'après (1)

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \sum_{i=1}^n \left[\int_{S_i} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \right]$$

soit

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}(A, S_i/R) \quad (13)$$

où

$\vec{\sigma}(A, S_i/R)$ désigne le moment cinétique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport à R.

3.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

3.3.2.1 Calcul direct de $\vec{\sigma}(A, S/R)$

Ce calcul s'effectue en tenant compte des points suivants :

A désigne le point quelconque où est calculé $\vec{\sigma}(A, S/R)$. A peut être fixe ou mobile dans R..

B désigne un point particulier de S et P désigne un point courant de S.

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \quad \vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{V}(B, S/R) + \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm \quad B \text{ et } P$$

appartenant à S

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(B, S/R) dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

or $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$

donc :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} dm \wedge \vec{V}(B, S/R) + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm + \int_S \vec{BP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

Finalement :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(B/R) + m \vec{AB} \wedge \left[\vec{GB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] + \int_S \vec{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BP} \right] dm \quad (14)$$

Remarque: Bien que la relation (14) donne l'expression du vecteur $\vec{\sigma}(A, S/R)$, ce dernier n'est jamais calculé par la relation (14). Dans la pratique, on calcule $\vec{\sigma}(A, S/R)$ grâce aux trois cas particuliers détaillés ci dessous.

3.3.2.2 Calcul pratique de $\vec{\sigma}(A, S/R)$

- **Si B est confondu avec A**

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A, S/R)$ est le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$, soit :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right] dm \quad (15)$$

- **Si B est confondu avec A fixe dans R**

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A, S/R)$ est fixe dans R et est, de plus, le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$, soit :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right] dm \quad (16)$$

- **Si B est confondu avec G centre d'inertie de S**

Le centre d'inertie G est le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$, soit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S/R) &= \vec{\sigma}(G, S/R) + m \vec{AG} \wedge \vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}(G, S/R) &= \int_S \vec{GP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{GP} \right] dm \end{aligned} \quad (17)$$

3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S

3.4.1 DEFINITION

Les expressions (15), (16) et (17) montrent l'existence de l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

$$\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R)) = \int_S \vec{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BP} \right] dm$$

Si on pose :

$$R_s = (B, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) \text{ repère lié à S et,}$$

$$B_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) \text{ base associée à } R_s.$$

On peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) = p\vec{x}_s + q\vec{y}_s + r\vec{z}_s$$

$$\vec{BP} = x\vec{x}_s + y\vec{y}_s + z\vec{z}_s$$