



ETUDE DES CHAINES FERMEES (2^{ème} partie)

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

ETUDE DES CHAINES FERMEES	1
(2 ^{ème} partie).....	1
2.4 Analyse statique des mécanismes à chaînes fermées	1
2.4.1 Objectifs.....	1
2.4.2 Principe fondamental	1
2.4.3 Méthode de résolution.....	2
2.4.4 Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme.....	2
2.4.5 Comment traiter l'hyperstatisme ?.....	3
2.4.6 Exemple traité : Malaxeur-mélangeur.....	4
2.5 Synthèse: Ce qu'il faut absolument savoir	10

2.4 Analyse statique des mécanismes à chaînes fermées

2.4.1 OBJECTIFS

- Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.
- Préciser les inconnues hyperstatiques.
- Modifier, si nécessaire, le mécanisme afin de le rendre isostatique.

2.4.2 PRINCIPE FONDAMENTAL

Chaque liaison normalisée est considérée comme parfaite.

Les éléments de réduction, dans le repère local $R(A, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, du torseur d'inter-efforts associé à la liaison L_{ij} sont :

$$\{S_j \rightarrow S_i\}_A = \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_R$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = X_{ji} \bar{x} + Y_{ji} \bar{y} + Z_{ji} \bar{z} \\ \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = L_{ji} \bar{x} + M_{ji} \bar{y} + N_{ji} \bar{z} \end{cases}$$

On applique le **Principe Fondamental de la Statique** à chacun des n solides de la chaîne simple.

Si $\{\bar{S}_i \rightarrow S_i\}_A$ désigne le torseur de toutes les actions extérieures agissant sur le solide S_i , on peut écrire:

$$\forall i \in [1, n] \quad \boxed{\{\bar{S}_i \rightarrow S_i\}_A = 0} \quad (1)$$

MECANISMES : ETUDE DES CHAINES FERMEES

Cours

soit

$$\forall i \in [1, n]$$

$$\sum_{j \neq i} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \quad (2)$$

$$\sum_{j \neq i} \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \quad (3)$$

2.4.3 METHODE DE RESOLUTION

2.4.3.1 Projection de (2) et (3) sur $R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

On obtient un système (E) de $6n$ équations scalaires à N_s paramètres statiques inconnus avec :

$$N_s = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{si} = \sum_{i=1}^{n+\gamma} (6 - n_{ci})$$

soit

$$N_s = 6(n + \gamma) - \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{ci} = 6(n + \gamma) - N_c$$

2.4.3.2 Rang statique

Le rang statique r_s est le nombre d'équations indépendantes du système (E). On a bien sûr $r_s \leq 6n$.

On peut démontrer que $m = 6n - r_s$ et donc que : $r_s = 6n - m$

Le système (E) s'écrit alors : $(A)(X) = (B)$

où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r_s inconnues d'inter-efforts.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant $N_s - r_s$ paramètres statiques à fixer et les paramètres donnés.

(A) désigne une matrice (r_s, r_s) de coefficients géométriques du mécanisme.

2.4.4 DEGRE D'HYPERSTATICITE D'UN MECANISME

2.4.4.1 Définition

On appelle degré d'hyperstaticité d'un mécanisme, noté h , le nombre de paramètres d'inter-efforts à fixer pour déterminer les r_s inconnues d'inter-efforts restantes.

$$h = N_s - r_s$$

2.4.4.2 Détermination rapide de h

Une détermination globale de h est nécessaire si on veut connaître rapidement la nature isostatique d'un mécanisme.

On a donc $h = 6(n + \gamma) - N_c - r_s$

MECANISMES : ETUDE DES CHAINES FERMEES

Cours

soit $h = 6(n + \gamma) - N_c - (6n - m)$

d'où $h = m + 6\gamma - N_c$

2.4.4.3 Signification de h

$h = 0$	$N_s = r_s$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est isostatique</p> <p>Toutes les inconnues d'inter-efforts sont déterminables. Le fonctionnement correct de ce mécanisme ne nécessite aucune condition géométrique particulière.</p>
$h > 0$	$N_s = r_s + h$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est hyperstatique d'ordre h.</p> <p>Il faut fixer h inconnues d'inter-efforts afin de déterminer les r_s inconnues restantes. Le fonctionnement correct de ce mécanisme nécessite h conditions géométriques à respecter.</p>

2.4.5 COMMENT TRAITER L'HYPERSTATISME

?

2.4.5.1 Modification du mécanisme réel en conservant

le modèle d'analyse

- **On annule h inconnues d'inter-efforts** n'appartenant ni aux liaisons d'entrée ni aux liaisons de sortie. Il reste à résoudre un système de r_s équations à r_s inconnues d'inter-efforts.
- **On accroît la mobilité interne** du mécanisme en augmentant le nombre de solides du mécanisme réel.

2.4.5.2 Conservation du mécanisme réel en modifiant

le modèle d'analyse

- **On rajoute h équations de comportement** en modélisant les solides comme déformables élastiquement et les liaisons rigides et sans jeu.
- **On rajoute h équations de compatibilité géométrique** en modélisant les solides comme indéformables et en tenant compte du jeu réel dans les liaisons.

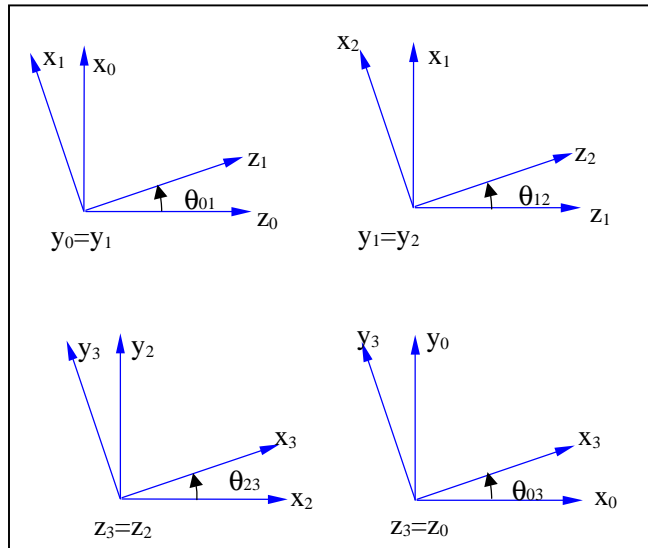
2.4.6 EXEMPLE TRAITE : MALAXEUR-MELANGEUR

2.4.6.1 Liaisons entre solides

L_{10} : Pivot d'axe (A, \vec{y}_0) (entrée)
 L_{32} : Pivot d'axe (C, \vec{z}_0)
 L_{30} : Pivot glissant d'axe (D, \vec{z}_0) (sortie)
 L_{21} : Pivot glissant d'axe (B, \vec{y}_0)

2.4.6.2 Paramétrage

$\vec{AB} = R\vec{z}_1$	$\vec{CB} = -\lambda\vec{y}_1$
$\vec{DA} = -d\vec{y}_0$	$\vec{CD} = l\vec{y}_3 - h\vec{z}_0$



2.4.6.3 Torseurs statiques associés aux liaisons

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (S_0 \rightarrow S_1) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{matrix} \right\}_{R_0} \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (S_2 \rightarrow S_1) \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{matrix} \right\}_{R_0}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (S_3 \rightarrow S_2) \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{matrix} \right\}_{R_0} \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (S_0 \rightarrow S_3) \end{matrix} \right\}_D = \left\{ \begin{matrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{R_0}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (\text{ext} \rightarrow S_1) \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{\text{ext}} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{R_0} \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ (\text{ext} \rightarrow S_3) \end{matrix} \right\}_D = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{\text{ext}} & N_{\text{ext}} \end{matrix} \right\}_{R_0}$$

2.4.6.4 Application du P.F.S