Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE

Cinématique plane : Résolution graphique

Sommaire

 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

La cinématique des solides : Mouvement plan

Cinématique : Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \quad \forall B \in S,\ \|\overrightarrow{AB}\| = cte \text{ dans le temps et dans l'espace}$$

Le champ des vecteurs-vitesse d'un solide est antisymétrique et équiprojectif (voir cours « la cinématique des solides »). Ainsi pour deux points A et B appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{A\in S_k/R_i} = \overrightarrow{V}_{B\in S_k/R_i} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_k/R_i} \Leftrightarrow \overrightarrow{V}_{A\in S_k/R_i} . \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_{B\in S_k/R_i} . \overrightarrow{AB}}$$

2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

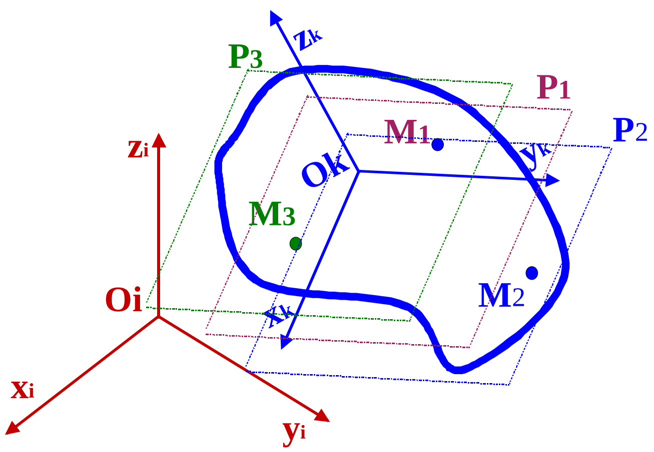
2.1. Définition

Un solide est animé d'un mouvement plan sur plan dans un repère de référence donné, si à tout instant, les vecteurs-vitesse de tous ses points restent parallèles à un plan fixe.

2.2. Théorème

Si trois points non alignés d'un solide S_k ont leur trajectoire dans un plan (P_i) appartenant au solide S_i, alors tous les points du solide S_k sont animés d'un mouvement plan, le plan du mouvement étant parallèle au plan (P_i).
Le mouvement du solide S_k est à tout instant une rotation instantanée d'axe perpendiculaire au plan (P_i).

Démonstration :
Soient trois points non alignés M_1, M_2 et M_3 appartenant au solide S_k et se déplaçant respectivement dans les plans P_1, P_2 et P_3 Parallèles entre eux de normale $\vec{z}_k$, dans un mouvement par rapport au solide S_i. de repère associé Ri.



Nous pouvons donc affirmer que les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}$, $\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ appartiennent aux plans ($P_{i=1,2,3}$).

La formule du champ des vecteurs-vitesse pour un solide nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_1},$$

$$\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_2},$$

$$\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_{ii}}}\wedge\overrightarrow{O_kM_3}$$

À partir des trois relations ci-dessus, nous obtenons :

$$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_2M_1} \text{ soit } \overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$$

$$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_3M_1} \text{ soit } \overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$$

Les trois points M_1, M_2 et M_3, non alignés, ont un mouvement à priori quelconque. Donc $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ sont deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i).

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$, perpendiculaire à deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i), est donc perpendiculaire à ces plans (P_i).

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i s'écrit en un point quelconque, M_1 par exemple :

$$\{V(S_k/S_i)\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\\ \overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}\end{Bmatrix}_{M_1}=\begin{Bmatrix}0,\ 0,\omega_z\\ V_x,V_y,\ 0\end{Bmatrix}_{M_1,\ \vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k} \quad ou \quad \overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}.\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=0$$

L'automoment de ce torseur est donc nul. C'est un torseur- glisseur. Donc en tout point I appartenant à l'axe du glisseur, nous avons $\overrightarrow{V_{I\in S_k/R_i}}=\vec{0}$.

Ainsi tous les points de l'axe central (Δ_{ki}), perpendiculaire aux plans (P_i), du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide S_k par rapport au repère R_i ont une vitesse nulle.

Le mouvement est donc une rotation instantanée d'axe (I, $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$) perpendiculaire aux plans (P_i).

En conclusion, si les trois points M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires dans les plans (P_i), tous les points appartenant respectivement aux normales à ces plans issues de M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires appartenant à des plans parallèles au plan (P_i).

Donc l'étude du mouvement plan d'un solide se ramène à l'étude du mouvement des points d'un plan (P_k) appartenant au solide (S_k) et qui reste en coïncidence avec un plan (P_i) lié au solide (S_i). Ce mouvement, qui est une rotation instantanée d'axe $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$ perpendiculaire au plan (Pi), est appelé mouvement plan sur plan.

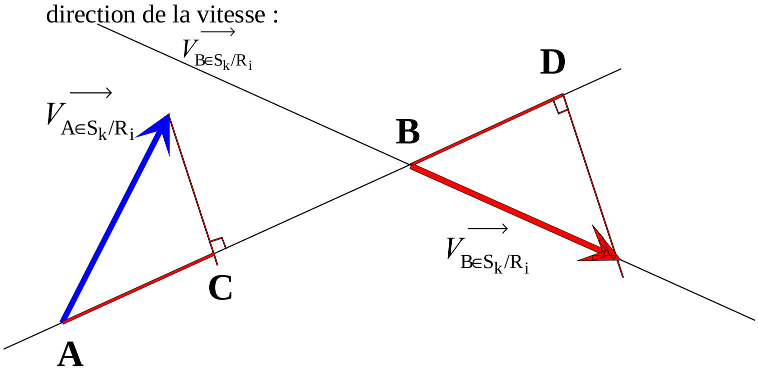
3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

3.1. Traduction géométrique de l'équiprojectivité :

3.1.1. Traduction géométrique de la relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ traduit que la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$. D'où la construction géométrique suivante :



Les projections orthogonales $\overline{AC}=\overline{BD}$, respectivement des vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$, sur la droite orientée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont des mesures algébriques. Ces projections sont donc du même côté par rapport aux points A et B.

3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité

La relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ est une relation scalaire. A priori nous avons quatre inconnues scalaires dans le plan formé par les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$. Nous ne pouvons donc appliquer cette relation d'équiprojectivité que dans la condition suivante : l*e vecteur-vitesse du point A et la direction du vecteur-vitesse du point B sont connus.*

L'ordre des opérations est le suivant :

1. projeter $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la droite (A,B) ce qui donne $\overline{AC}$,
2. placer le point D sur la droite (A,B) tel que : $\overline{AC}=\overline{BD}$,
3. du point D, élever une perpendiculaire à la droite AB qui coupe la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ en un point qui est l'extrémité de ce vecteur.

Remarque :

Cette construction est impossible si la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ est perpendiculaire à la droite (A,B).

3.2. Centre instantané de rotation ou C.I.R.

3.2.1. Définition

On appelle centre instantané de rotation I_{ki} du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i le point où l'axe central (Δ_{ki}), du torseur cinématique caractérisant ce mouvement, perce le plan d'étude.

Remarque :

Cette définition nous montre que :