



# *Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE*

## *Cinématique plane : Résolution graphique*

### Sommaire

<b>1.</b>	<b>DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE.....</b>	<b>2</b>
<b>2.</b>	<b>CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN .....</b>	<b>2</b>
2.1.	DEFINITION .....	2
2.2.	THEOREME .....	2
<b>3.</b>	<b>APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE.....</b>	<b>3</b>
3.1.	TRADUCTION GEOMETRIQUE DE L'EQUIPROJECTIVITE : .....	4
3.1.1.	<i>Traduction géométrique de la relation <math>V_{A \in S_k / R_1} \vec{AB} = V_{B \in S_k / R_1} \vec{AB}</math> .....</i>	<i>4</i>
3.1.2.	<i>Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité.....</i>	<i>4</i>
3.2.	CENTRE INSTANTANE DE ROTATION OU C.I.R. ....	4
3.2.1.	<i>Définition .....</i>	<i>4</i>
3.2.2.	<i>Propriété du CIR.....</i>	<i>5</i>
3.2.3.	<i>Détermination analytique du centre instantané de rotation .....</i>	<i>5</i>
3.3.	BASE ET ROULANTE.....	5
3.3.1.	<i>Définition .....</i>	<i>5</i>
3.3.2.	<i>Propriétés.....</i>	<i>5</i>
3.3.3.	<i>Détermination analytique de la roulante dans un mouvement plan sur plan .....</i>	<i>5</i>
3.3.4.	<i>Détermination analytique de la base dans un mouvement plan sur plan .....</i>	<i>5</i>
3.3.5.	<i>Exemple de détermination de la base et de la roulante d'un mouvement .....</i>	<i>6</i>
3.3.5.1	<i>Présentation du système support de l'étude .....</i>	<i>6</i>
3.3.5.2	<i>Recherche du centre instantané de rotation I .....</i>	<i>6</i>
3.3.5.3	<i>Equation cartésienne de la base du mouvement de R1 par rapport à R0. ....</i>	<i>7</i>
3.3.5.4	<i>Equation cartésienne de la roulante du mouvement de R1 par rapport à R0. ....</i>	<i>7</i>
3.3.5.5	<i>Tracer de la base et roulante du mouvement de R1 par rapport à R0. ....</i>	<i>7</i>
3.4.	DISTRIBUTION DES VECTEURS-VITESSE A PARTIR DU CENTRE INSTANTANE DE ROTATION.....	8
3.5.	DETERMINATION DE TOUS LES CENTRES INSTANTANES DE ROTATION .....	8
3.6.	THEOREME DES TROIS PLANS GLISSANTS (OU DES TROIS PLANS MOBILES OU DES TROIS C.I.R.).....	9
<b>4.</b>	<b>MODÉLISATION PLANE DES MECANISMES.....</b>	<b>10</b>
4.1.	MODELES DES LIAISONS DITES PLANES .....	10

# La cinématique des solides : Mouvement plan

*Cinématique : Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent.*

## 1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable  $S$  est un système matériel, tel que la distance entre deux points  $A$  et  $B$  appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \quad \forall B \in S, \quad |\vec{AB}| = cte \quad \text{dans le temps et dans l'espace}$$

Le champ des vecteurs-vitesse d'un solide est antisymétrique et équiprojectif (voir cours « la cinématique des solides »). Ainsi pour deux points  $A$  et  $B$  appartenant au solide  $S_k$  en mouvement par rapport à un repère  $R_i$ , nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \Leftrightarrow \vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$$

## 2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

### 2.1. Définition

Un solide est animé d'un mouvement plan sur plan dans un repère de référence donné, si à tout instant, les vecteurs-vitesse de tous ses points restent parallèles à un plan fixe.

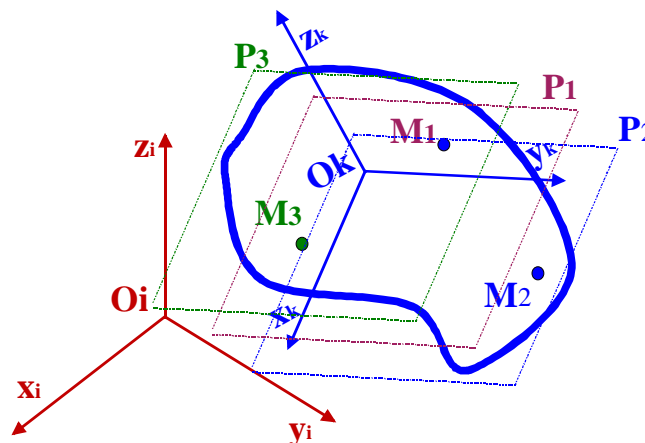
### 2.2. Théorème

Si trois points non alignés d'un solide  $S_k$  ont leur trajectoire dans un plan ( $P_i$ ) appartenant au solide  $S_i$ , alors tous les points du solide  $S_k$  sont animés d'un mouvement plan, le plan du mouvement étant parallèle au plan ( $P_i$ ).

Le mouvement du solide  $S_k$  est à tout instant une rotation instantanée d'axe perpendiculaire au plan ( $P_i$ ).

#### Démonstration :

Soient trois points non alignés  $M_1, M_2$  et  $M_3$  appartenant au solide  $S_k$  et se déplaçant respectivement dans les plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$  Parallèles entre eux de normale  $\vec{z}_k$ , dans un mouvement par rapport au solide  $S_i$ . de repère associé  $R_i$ .



Nous pouvons donc affirmer que les vecteurs-vitesse  $\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i}$ ,  $\vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i}$  et  $\vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i}$  appartiennent aux plans  $(P_{i=1,2,3})$ .

La formule du champ des vecteurs-vitesse pour un solide nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M_1}, \\ \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M_2}, \\ \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M_3} \end{aligned}$$

À partir des trois relations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} &= \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \overrightarrow{M_2 M_1} \text{ soit } \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} \perp \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \\ \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} &= \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \overrightarrow{M_3 M_1} \text{ soit } \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} \perp \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \end{aligned}$$

Les trois points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ , non alignés, ont un mouvement à priori quelconque. Donc

$\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i}$  et  $\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i}$  sont deux vecteurs non colinéaires aux plans  $(P_i)$ .

**Le vecteur  $\vec{\Omega}_{S_k / R_i}$ , perpendiculaire à deux vecteurs non colinéaires aux plans  $(P_i)$ , est donc perpendiculaire à ces plans  $(P_i)$ .**

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$  s'écrit en un point quelconque,  $M_1$  par exemple :

$$\{V(S_k / S_i)\}_{M_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \\ \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0, 0, \omega_z \\ V_x, V_y, 0 \end{array} \right\}_{M_1, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k} \quad \text{ou } \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \cdot \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} = 0$$

L'automoment de ce torseur est donc nul. C'est un torseur- glisseur. Donc en tout point I appartenant à l'axe du glisseur, nous avons  $\vec{V}_{I \in S_k / R_i} = \vec{0}$ .

**Ainsi tous les points de l'axe central  $(\Delta_{ki})$ , perpendiculaire aux plans  $(P_i)$ , du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide  $S_k$  par rapport au repère  $R_i$  ont une vitesse nulle.**

**Le mouvement est donc une rotation instantanée d'axe  $(I, \vec{\Omega}_{S_k / R_i})$  perpendiculaire aux plans  $(P_i)$ .**

En conclusion, si les trois points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ont leurs trajectoires dans les plans  $(P_i)$ , tous les points appartenant respectivement aux normales à ces plans issues de  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ont leurs trajectoires appartenant à des plans parallèles au plan  $(P_i)$ .

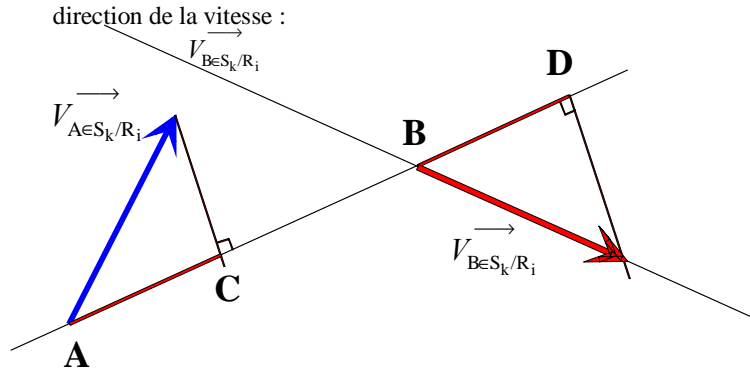
**Donc l'étude du mouvement plan d'un solide se ramène à l'étude du mouvement des points d'un plan  $(P_k)$  appartenant au solide  $(S_k)$  et qui reste en coïncidence avec un plan  $(P_i)$  lié au solide  $(S_i)$ . Ce mouvement, qui est une rotation instantanée d'axe  $\vec{\Omega}_{S_k / R_i}$  perpendiculaire au plan  $(P_i)$ , est appelé mouvement plan sur plan.**

### 3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE

### 3.1. Traduction géométrique de l'équiprojectivité :

#### 3.1.1. Traduction géométrique de la relation $V_{A \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB} = V_{B \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB}$

$V_{A \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB} = V_{B \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB}$  traduit que la projection orthogonale de  $V_{A \in S_k / R_i}$  sur la direction de  $\overrightarrow{AB}$  est égale à la projection orthogonale de  $V_{B \in S_k / R_i}$  sur la direction de  $\overrightarrow{AB}$ . D'où la construction géométrique suivante :



Les projections orthogonales  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , respectivement des vecteurs-vitesse  $V_{A \in S_k / R_i}$  et  $V_{B \in S_k / R_i}$ , sur la droite orientée par le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont des mesures algébriques. Ces projections sont donc du même côté par rapport aux points A et B.

#### 3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité

La relation  $V_{A \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB} = V_{B \in S_k / R_i} \cdot \overrightarrow{AB}$  est une relation scalaire. A priori nous avons quatre inconnues scalaires dans le plan formé par les vecteurs-vitesse  $V_{A \in S_k / R_i}$  et  $V_{B \in S_k / R_i}$ . Nous ne pouvons donc appliquer cette relation d'équiprojectivité que dans la condition suivante : *le vecteur-vitesse du point A et la direction du vecteur-vitesse du point B sont connus.*

L'ordre des opérations est le suivant :

1. projeter  $V_{A \in S_k / R_i}$  sur la droite (A,B) ce qui donne  $\overline{AC}$ ,
2. placer le point D sur la droite (A,B) tel que :  $\overline{AC} = \overline{BD}$ ,
3. du point D, élever une perpendiculaire à la droite AB qui coupe la direction du vecteur-vitesse  $V_{B \in S_k / R_i}$  en un point qui est l'extrémité de ce vecteur.

**Remarque :**

Cette construction est impossible si la direction du vecteur-vitesse  $V_{B \in S_k / R_i}$  est perpendiculaire à la droite (A,B).

### 3.2. Centre instantané de rotation ou C.I.R.

#### 3.2.1. Définition

On appelle centre instantané de rotation  $I_{ki}$  du mouvement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$  le point où l'axe central  $(\Delta_{ki})$ , du torseur cinématique caractérisant ce mouvement, perce le plan d'étude.

**Remarque :**

Cette définition nous montre que :