Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE

Cinématique

Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent. Au programme de CPGE, la cinématique est limitée aux mouvements des solides ou d'ensemble de solides (le solide est indéformable).

On sort du point de vue de la cinématique lorsque tous les mouvements relatifs (mouvement de S_i par rapport à S_j) modélisés par leurs torseurs cinématiques sont déterminés en fonction des mobilités souvent notées $m = m_u + m_i$ ou couramment appelées paramètres cinématiques.

La cinématique permet donc de déterminer les vecteurs positions, les vecteurs vitesses linéaire et angulaire et les vecteurs accélérations linéaire et angulaire des points d'un solide quelconque par rapport à un autre solide quelconque en fonction des mobilités du système mécanique.

Remarque importante : lors de l'étude cinématique, les mobilités ne sont pas connues, seule la dynamique permettra de les déterminer.

1 DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE 2

2 ÉQUIVALENCE REPÈRE – SOLIDE 2

3 POSITIONNEMENT D'UN SOLIDE 2

4 POINT COÏNCIDANT - VECTEUR-POSITION - TRAJECTOIRE 2

4.1 POINT COÏNCIDANT 2

Définition 2

4.1.1.1 Notations utilisées 3

4.2 VECTEUR-POSITION $\overrightarrow{O_iM}$ 3

4.2.1 Définition 3

4.3 TRAJECTOIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN REPERE 4

*4.3.1 Définition de la trajectoire .... **Erreur ! Signet non défini.***

5 TORSEUR CINÉMATIQUE 4

5.1.1 L'axe central du torseur cinématique 5

5.1.2 Mouvements de solides particuliers 6

5.1.2.1 Mouvement d'un solide S_k en rotation par rapport à un solide S_i. 6

5.1.2.2 Mouvement d'un solide S_k en translation par rapport à un solide S_i. 6

5.2 COMPOSITION DE MOUVEMENTS 7

5.2.1 Utilisation de la composition des mouvements 8

5.2.1.1 Objectif 8

Traduction de la cinématique du mécanisme 8

1 DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

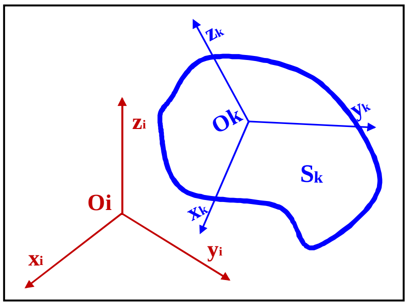
On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \ \forall B \in S, \ \|\overrightarrow{AB}\| = \text{cte} \ \text{dans le temps et dans l'espace}$$

2 ÉQUIVALENCE REPÈRE – SOLIDE.

Un repère affine $\Re_k(O_k, \overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$ est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de leur origine (leur norme est égale à 1). Un repère affine est donc équivalent à un solide.

Par bijection, on associe donc un repère $R_k(\overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$ orthonormé direct à un solide S_k.ou $\Re_k(O_k, \overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$.



3 POSITIONNEMENT D'UN SOLIDE

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i, dans un espace à trois dimensions, est définie par trois points non alignés donc par neuf paramètres. Ces trois points restent à des distances invariables les unes des autres. Il convient donc d'ajouter trois équations de liaison de ces paramètres.

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i dépend donc de six paramètres indépendants.
Il est usuel en Mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i,
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_k par rapport à celle du repère R_i.

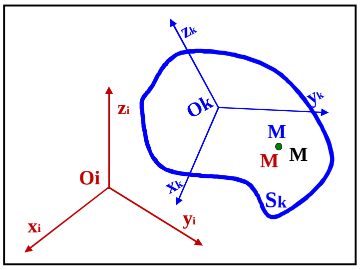
Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i.
Une possibilité de mouvement est appelée degré de liberté. Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations).

4 POINT COÏNCIDANT - VECTEUR-POSITION - TRAJECTOIRE

4.1 Point coïncident

4.1.1 Définition

Un point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, coïncide à chaque instant avec un point M appartenant au solide S_i. Ce point M est dit coïncident du point M à l'instant t.
M est appelé point mobile et M, noté $M_i(t)$ est appelé point coïncidant à l'instant t.
En clair, il sera nécéssaire de toujours savoir à quel solide, le point M qui nous préoccupe appartient.



4.1.2 Notations utilisées

$\overrightarrow{V_{(M\in S_k/S_i)}}$, M appartient au solide S_k. la précision de notation est indiquée dans $\overrightarrow{V_{(M\in Rk/Ri)}}$ par $M \in S_k$. $\overrightarrow{V_{(M\in Rk/Ri)}}$ se lit : Vitesse du point M appartenant au solide S_k par rapport au solide S_i.

Le point Oi appartient au solide S_i, L'appartenance de Oi à S_i est moins visible mais est définie par la dérivée par rapport au temps d'un vecteur dans un repère Ri : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i}$. Dans cette notation, l'appartenance du point M n'est pas indiquée, alors attention. C'est pourquoi la notation complète suivant $\overrightarrow{V_{(M\in S_k/S_i)}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i}$ est nécessaire.

4.2 Vecteur-position $\overrightarrow{O_iM}$

4.2.1 Définition

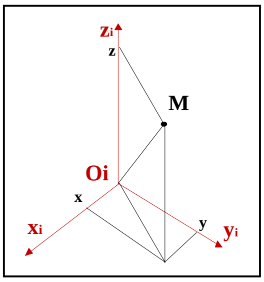
La position du point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère de référence R_i, est variable avec le temps. Le vecteur $\overrightarrow{O_iM_i(t)}$, variable avec le temps, est appelé vecteur-position du point M relativement au repère R_i.

Attention, pour ne pas alourdir les notations, on note souvent $\overrightarrow{O_iM}$ sans spécifier l'appartenance de M.

4.2.2 Le paramétrage d'un point

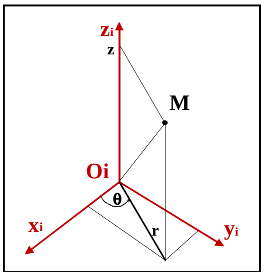
Remarque : Pour exprimer le vecteur-position dans le repère de référence, il faut utiliser le système de coordonnées adéquat

- coordonnées cartésiennes,



$$\overrightarrow{O_iM} = x.\overrightarrow{x_i} + y.\overrightarrow{y_i} + z.\overrightarrow{z_i}$$

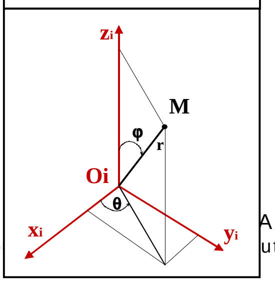
- coordonnées cylindriques



les coordonnées cylindriques du point M dans le repère $\Re_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ sont (r, θ, z)
ou en cartésiennes

$$\overrightarrow{O_iM} = r.\cos\theta..\overrightarrow{x_i} + r.\sin\theta.\overrightarrow{y_i} + z.\overrightarrow{z_i}$$

- coordonnées sphériques.



les coordonnées sphériques du point M dans le repère $\Re_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ sont (r, θ, φ)
ou en cartésiennes