



# Liaisons entre Solides d'un mécanisme

## 1ère partie : LIAISONS NORMALISEES ENTRE SOLIDES

1.1. BUT DE LA MODELISATION .....	3
1.2. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES LIAISONS NORMALISEES .....	3
1.2.1. Géométrie des contacts .....	3
1.2.1.1 Liaisons simples normalisées.....	4
1.2.1.2 Liaisons composées normalisées .....	4
1.2.2. Repère local associé à la liaison $o_{ij}$ .....	5
1.2.3. Paramétrage d'une liaison .....	5
1.2.3.1 Définition.....	5
1.2.3.2 Détermination d'un paramétrage .....	5
1.2.4. Degrés de liberté et de liaison d'un contact (modélisé par une liaison) entre deux solides.....	6
1.2.4.1 Degrés de liberté.....	6
1.2.4.2 Degrés de liaison .....	6
1.2.5. Exemples .....	6
1.3. CARACTERISTIQUES CINEMATIQUES DES LIAISONS.....	6
1.3.1. Torseur cinématique, au point A, du solide $S_i$ dans son mouvement / au solide $S_j$ .....	6
1.3.1.1 Définition.....	6
1.3.1.2 Expression du torseur cinématique dans le repère local $v$ .....	7
1.3.2. Mobilités dans une liaison $o_{ij}$ .....	7
1.3.3. Décomposition du vecteur $\vec{\Omega}(S_i/S_j)$ .....	7
1.4. LIAISONS NORMALISEES USUELLES.....	8
1.4.1. Liaison Sphère/Plan en A de normale $\vec{n}$ .....	8
1.4.1.1 Définition : .....	8
1.4.1.2 Conséquences .....	8
1.4.2. Liaison Cylindre/plan $(A, \vec{t}, \vec{n})$ (contact linéaire rectiligne).....	9
1.4.2.1 Définition : .....	9
1.4.2.2 Conséquences .....	9
1.4.3. Liaison Sphère/Cylindre en A d'axe $(A, \vec{u})$ .....	10
1.4.3.1 Définition : .....	10
1.4.3.2 Conséquences .....	10
1.4.4. Liaison Cylindre/Cylindre d'axe $(A, \vec{u})$ .....	11
1.4.4.1 Définition: .....	11
1.4.4.2 Conséquences .....	11
1.4.5. Liaison Plan/Plan de normale $\vec{n}$ .....	12
1.4.5.1 Définition: .....	12
1.4.5.2 Conséquences .....	12
1.4.6. Liaison Sphère/Sphère ou sphérique de centre A .....	13
1.4.6.1 Définition: .....	13
1.4.6.2 Conséquences .....	13
1.5. LIAISONS USUELLES NORMALISEES COMPOSEES.....	14
1.5.1. Liaison pivot d'axe $(A, \vec{u})$ .....	14
1.5.1.1 Définition: .....	14
1.5.1.2 Conséquences .....	14
1.5.2. Liaison glissière de direction $\vec{u}$ .....	15
1.5.2.1 Définition: .....	15
1.5.2.2 Conséquences .....	15
1.5.3. Liaison sphérique à doigt $(A, \vec{t}, \vec{n})$ .....	16
1.5.3.1 Définition: .....	16
1.5.3.2 Conséquences .....	16
1.5.4. Liaison glissière hélicoïdale d'axe $(A, \vec{u})$ .....	17
1.5.4.1 Définition: .....	17
1.5.4.2 Conséquences .....	17
1.5.5. Liaison encastrement.....	18
1.5.5.1 Définition.....	18

1.5.5.2 Conséquences .....18

# 1. LIAISONS NORMALISEES ENTRE SOLIDES

## 1.1. But de la modélisation

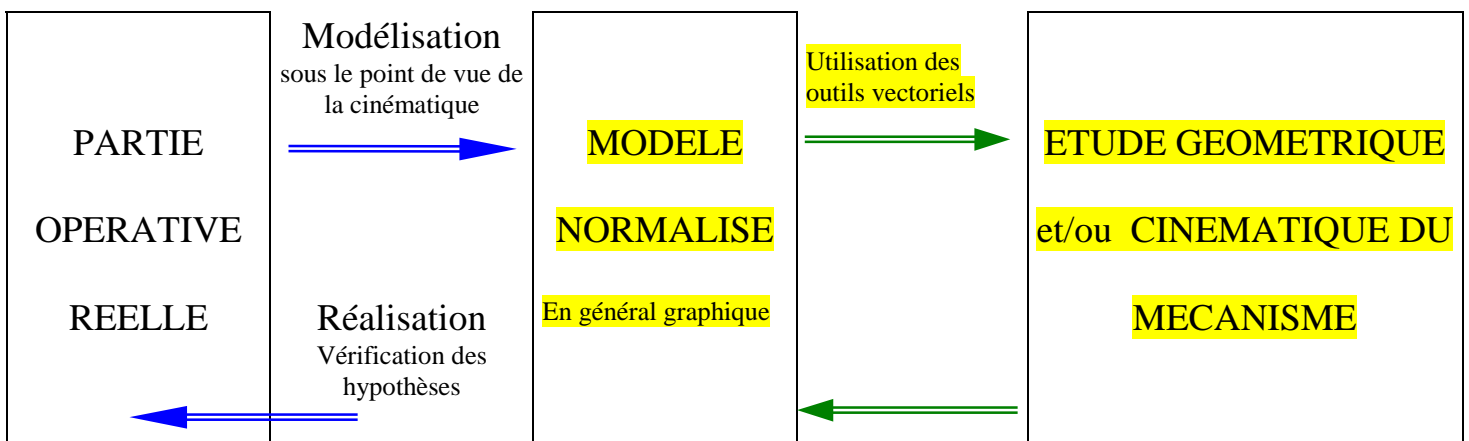
Toute partie opérative réelle est constituée de pièces mécaniques (déformables, non homogènes, non isotropes, etc.) assemblées entre elles grâce à des surfaces de contact. Les assemblages réalisés sont caractérisés par un fonctionnement avec jeu et avec frottement.

**La modélisation propose de remplacer ce mécanisme réel par le modèle théorique suivant :**

mécanisme réel	modèle théorique
pièces mécaniques en liaison complète	solide indéformable  liaison normalisée <b>géométriquement parfaite</b> sous le <b>point de vue de la cinématique et dynamique</b> <i>et dynamiquement parfaite parfois en dynamique</i> lorsque le phénomène de frottement n'est pas nécessaire au bon fonctionnement
assemblage	
	mécanisme
partie opérative	

Les buts poursuivis par cette modélisation sont les suivants :

- écrire les relations liant les paramètres géométriques afin de déterminer la position de chacun des solides en fonction de paramètres imposés .
- écrire les relations liant les paramètres cinématiques afin de déterminer les relations entrée-sortie du mécanisme modélisé.
- déterminer la mobilité du mécanisme



## 1.2. Caractéristiques géométriques des liaisons normalisées

### 1.2.1. Géométrie des contacts

La géométrie des contacts entre les solides  $S_i$  et  $S_j$  peut être définie grâce aux 6 surfaces élémentaires suivantes :

- point de contact
- ligne de contact (droite, cercle)
- surface de contact (cylindre, plan, sphère)

Cette analyse provient du fait que les surfaces que nous fabriquons aujourd’hui à moindre coût, sont : le cylindre, le plan et la sphère.

1.2.1.1 Liaisons simples normalisées

On appelle *liaison élémentaire* une liaison définie à partir d’une seule surface de contact élémentaire. A partir des trois surfaces de contact cylindre, plan, sphère, il est possible de définir les 6 liaisons simples suivantes :

Nom de la liaison élémentaire normalisée	Mouvements possibles de $S_i/S_j$	Surface de contact élémentaire $S_i/S_j$
ponctuelle de normale $\vec{n}$ <i>Liaison sphère/plan de normale <math>\vec{n}</math></i>	Rotation autour du point de contact A Translation dans le plan tangent de contact $\pi$	point <i>ex: sphère/plan</i>
linéaire rectiligne $(A, \vec{t}, \vec{n})$ <i>Liaison cylindre/plan <math>(A, \vec{t}, \vec{n})</math></i>	Rotation autour de $(A, \vec{t})$ droite de contact Rotation autour de $(A, \vec{n})$ normale au plan tangent $\pi$ Translation dans le plan tangent de contact $\pi$	ligne droite plane <i>ex: cylindre/plan</i>
linéaire annulaire d’axe $(A, \vec{u})$ <i>Liaison sphère/cylindre d’axe <math>(A, \vec{u})</math></i>	Rotation autour de A centre de la ligne de contact Translation de direction $(A, \vec{u})$ avec $\vec{u}$ normale au plan de la ligne de contact.	ligne circulaire <i>ex: sphère/cylindre</i>
pivot glissant d’axe $(A, \vec{u})$ <i>Liaison cylindre/cylindre d’axe <math>(A, \vec{u})</math></i>	Rotation autour de $(A, \vec{u})$ axe du cylindre de contact Translation de direction $(A, \vec{u})$	cylindre <i>ex: cylindre/cylindre</i>
plane de normale $\vec{n}$ <i>Liaison plan/plan de normale <math>\vec{n}</math></i>	Rotation autour de $(A, \vec{n})$ normale au plan tangent $\pi$ Translation dans le plan tangent de contact $\pi$	plan <i>ex : plan/plan</i>
sphérique de centre A <i>Liaison sphère/sphère de centre A</i>	Rotation autour de A centre de la sphère de contact	sphère <i>ex : sphère/sphère</i>

1.2.1.2 Liaisons composées normalisées

On appelle *liaison composée* une liaison définie par l’association de plusieurs liaisons simples.

Les 5 liaisons composées normalisées sont les suivantes :

Nom de la liaison composée normalisée	Mouvements possibles de $S_i/S_j$	Association de liaisons simples : exemples
<i>pivot d’axe <math>(A, \vec{u})</math></i>	Rotation autour de l’axe $(A, \vec{u})$ Aucune translation possible	<i>pivot glissant <math>(A, \vec{u})</math> et ponctuelle <math>(A, \vec{u})</math></i>

<b>Cours</b>	<b>Liaisons normalisées entre solides</b>
--------------	---

<i>glissière d'axe</i> (A, $\vec{u}$ )	Translation de direction (A, $\vec{u}$ )	
<i>hélicoïdale d'axe</i> (A, $\vec{u}$ )	Rotation et translation proportionnelle autour de l'axe (A, $\vec{u}$ )	
<i>sphérique à doigt d'axe</i> (A, $\vec{z}$ ) <i>et de plan de rainure</i> (A, $\vec{x}, \vec{z}$ )	Rotation autour de l'axe (A, $\vec{z}$ ) Rotation autour de l'axe (A, $\vec{y}$ )	
<i>encastrement</i>	Aucun mouvement possible	

**1.2.2. Repère local associé à la liaison  $O_{ij}$**

Le repère local  $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est construit à partir de la géométrie des contacts définissant la liaison  $O_{ij}$ .

$\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  s'appuie sur l'élément caractéristique des surfaces de contact (existence d'un plan tangent de contact, direction privilégiée du mouvement ) et de plus , est associé à un repère vectoriel de base orthonormée directe.

D'où

$\nu = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  trièdre orthonormé direct avec

A centre géométrique de la liaison  $O_{ij}$

(A,  $\vec{x}$ ) direction normale au plan tangent de contact  $\pi$   
ou colinéaire à la direction privilégiée du mouvement  $\vec{u}$

**1.2.3. Paramétrage d'une liaison**

**1.2.3.1 Définition**

Il s'agit de l'ensemble des *paramètres géométriques* ( longueurs et angles ) permettant de définir la position du solide  $S_i$  par rapport au solide  $S_j$ .

**1.2.3.2 Détermination d'un paramétrage**

On associe au solide  $S_i$  le repère  $\nu_i(A_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et au solide  $S_j$ , le repère  $\nu_j(A_j, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$

Si le solide  $S_j$  sert de référence,  $v$  et  $v_j$  sont confondus. Paramétrer la liaison  $o_{ij}$  revient alors à déterminer à tout instant les deux vecteurs suivants:

$$\vec{A_j A_i}$$

vecteur déplacement du point  $A_i$  par rapport au point  $A_j$  (unité: m)

$$\vec{\Phi}(S_i / S_j)$$

vecteur rotation du solide  $S_i$  autour du point  $A_j$  (unité: rd)

Avec, par exemple, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A_j A_i} = a_{ij}\bar{x} + b_{ij}\bar{y} + c_{ij}\bar{z}$$

$$\vec{\Phi}(S_i / S_j) = \alpha_{ij}\bar{x} + \beta_{ij}\bar{y} + \gamma_{ij}\bar{z}$$

$$v = (A, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ repère local de la liaison } o_{ij}$$

Les repères  $v$ ,  $v_i$ ,  $v_j$  coïncident en  $A$  à  $t = 0$ .

**1.2.4. Degrés de liberté et de liaison d'un contact (modélisé par une liaison) entre deux solides**

**1.2.4.1 Degrés de liberté**

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison correspond au nombre de mouvements possibles (6 maximum : trois rotations et trois translation) du solide  $S_i$  par rapport au solide  $S_j$  dans le repère local  $\mathcal{V}$ .

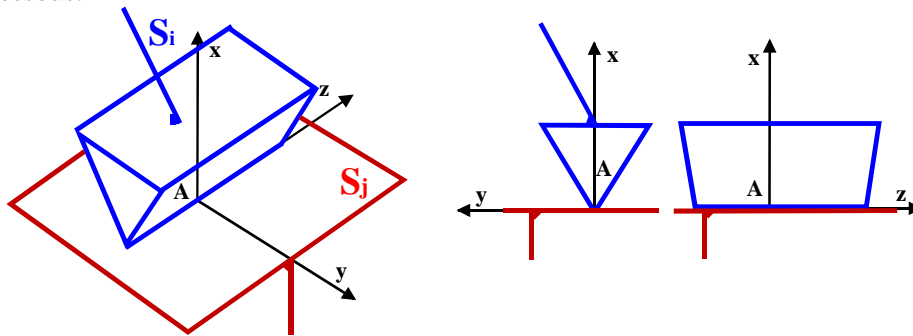
**1.2.4.2 Degrés de liaison**

Le nombre de degrés de liaison correspond au nombre de *paramètres géométriques indépendants* définissant la position du solide  $S_i$  par rapport au solide  $S_j$ .

**1.2.5. Exemples**

- Si le solide  $S_i$  est libre (sans liaison) par rapport au solide  $S_j$ , le nombre de degrés de liberté est égal à 6 et le nombre de degrés de liaison est nul.
- Si le solide  $S_i$  est en liaison cylindre/plan par rapport au solide  $S_j$ , le nombre de degrés de liberté est égal à 4, deux rotations et deux translations dans le repère local  $\mathcal{V}$ .

La représentation graphique de la liaison cylindre/plan entre le solide  $S_i$  et le solide  $S_j$ , se représente comme ci-dessous.



Le contact est donc linéique rectiligne et pour définir géométriquement une droite, il est nécessaire de donner deux points. Le degré de liaison est donc 2. On remarque bien évidemment que :

**Le degré de liaison est égal à 6 moins le degré de liberté.**

**1.3. Caractéristiques cinématiques des liaisons**

**1.3.1. Torseur cinématique, au point A, du solide  $S_i$  dans son mouvement / au solide  $S_j$**

**1.3.1.1 Définition**

Le torseur cinématique, au point A, du solide  $S_i$  dans son mouvement par rapport au solide  $S_j$  est défini par:

$$\{V (S_i/S_j)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(A,S_i/S_j)_A \end{array} \right\}$$

où,

$\vec{\Omega}(S_i/S_j)$	vecteur rotation instantanée du solide $S_i$ par rapport au solide $S_j$ (unité de la norme : rd/s)
$\vec{V}(A,S_i/S_j)$	vecteur vitesse du point A, appartenant au solide $S_i$ dans son mouvement par rapport au solide $S_j$ (unité de la norme : m/s)