Bijections de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$

1. Pour tout p de $\mathbb{N}$, on note $\begin{cases} D_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y=p\} \\ S_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y<p\} \end{cases}$
   (a) Vérifier que la famille $(D_p)_{p\geq 0}$ constitue une partition de $\mathbb{N}^2$. [S]
   (b) Calculer le cardinal d_p de l'ensemble D_p, et le cardinal s_p de l'ensemble S_p. [S]
2. Dans cette question, on forme une bijection f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout couple (x,y) d'entiers natruels, on pose $f(x,y) = x + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.
   (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{N}^2$, on a : $s_{x+y} \leq f(x,y) < s_{x+y+1}$. [S]
   (c) On se donne deux éléments (x,y) et (x',y') de $\mathbb{N}^2$, tels que $f(x,y) = f(x',y')$.
   Montrer que $x+y = x'+y'$, puis que $(x,y) = (x',y')$. Conclusion ? [S]
   (d) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique p de $\mathbb{N}$ tel que $s_p \leq n < s_{p+1}$. [S]
   (e) Avec les notations précédentes, calculer $f(n-s_p, s_{p+1}-n-1)$.
   En déduire que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (f) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f ? [S]
   (g) Interpréter graphiquement la signification de l'application f. [S]
3. Dans cette question, on forme (à partir de f) une bijection g de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$, on pose $g(x,y,z) = f(x, f(y,z))$.
   (a) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application g ? [S]
4. On va généraliser ce qui précède en formant f_k bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout $k \geq 1$.
   On définit donc les applications f_k de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
   – Tout d'abord, f_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   – Ensuite, si $k \geq 2$ et si on suppose que f_{k-1} est connue, on pose :
   Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k))$.
   (a) Vérifier les égalités $f_2 = f$ et $f_3 = g$. [S]
   (b) Pour tout $k \geq 1$, montrer que l'application f_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $f_k(0, \ldots, 0, 1) = 1$.
   En déduire l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f_k, pour tout $k \geq 4$. [S]
5. La question (4) montre que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^k$.
   On rappelle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
   Dans cette question, on va montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Il suffit bien sûr de montrer qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, surjective.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est notée φ_n pour simplifier les notations.
   Conclure en considérant $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = \varphi_n(n) + 1$. [S]

6. Cette question généralise les notations et résultats de la question (1).

   Pour tout (k,p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note : $\begin{cases} D_{k,p} = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k = p\} \\ S_{k,p} = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k < p\} \end{cases}$

   Remarque : avec $k=2$, on retrouve bien $D_{2,p} = D_p$ et $S_{2,p} = S_p$.

   (a) On se donne n dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $q \geq n$, on a $\sum\limits_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_{q+1}^{n+1}$ [S]

   (b) On note $s(k,p)$ le cardinal de l'ensemble $S_{k,p}$.

   Par une récurrence sur l'entier $k \geq 1$, montrer que $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^{k}$. [S]

   (c) En déduire le cardinal $d(k,p)$ de l'ensemble $D_{k,p}$. [S]

   (d) Soient $k \geq 1$ et $p \geq 0$. Montrer que $s(k,p+1) + s(k+1,p) = s(k+1,p+1)$. [S]

   (e) Montrer que pour $k \geq 1$ donné, la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante. [S]

7. Dans cette question, on généralise la définition des applications f, g de manière à former à nouveau des bijections g_k de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout entier $k \geq 1$.

   La méthode de construction des g_k diffère cependant de celle vue à la question (4).
   On utilise les notations et les résultats de la question (6).
   La démonstration de la bijectivité des g_k généralise celle vue dans la question (2).

   Pour tout $k \geq 1$ et tout $(x_1,\ldots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on pose :

   $g_k(x_1,\ldots,x_k) = s(1,x_1) + s(2,x_1+x_2) + \cdots + s(k,x_1+\cdots+x_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} s(j,x_1+\cdots+x_j)$

   On observera qu'avec cette définition, et pour tout $k \geq 1$, on a :

   $$(E) \qquad g_{k+1}(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}) = g_k(x_1,\ldots,x_k) + s(k+1,x_1+\cdots+x_{k+1})$$

   (a) Vérifier les égalités $g_1 = f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $g_2 = f_2 = f$.

   Expliciter l'application g_3. A-t-on $g_3 = f_3$ (c'est-à-dire $g_3 = g$) ? [S]

   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $(x_1,\ldots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on a l'encadrement :

   $$s(k,x_1+\ldots+x_k) \leq g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,x_1+\ldots+x_k+1).$$

   Indication : raisonner par récurrence sur k, et utiliser les questions (6d) et (6e). [S]

   (c) On se donne $(x_1,\ldots,x_k)$ et $(x'_1,\ldots,x'_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.
   On suppose en outre que $g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_k(x'_1,\ldots,x'_k)$.
   Montrer que $x_1+\cdots+x_k = x'_1+\cdots+x'_k$. [S]

   (d) Déduire de ce qui précède que les applications $(g_k)_{k\geq 1}$ sont injectives. [S]

   (e) On se donne deux entiers $k \geq 1$ et $p \geq 0$, et $(x_1,\ldots,x_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.

   En utilisant les questions (6d) et (7b), montrer l'équivalence :

   $$g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,p) \Leftrightarrow (x_1,\ldots,x_k) \in S_{k,p}.$$

   En déduire que l'application g_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [S]

Corrigé du Problème

1. (a) Chaque D_p est non vide puisqu'il contient par exemple $(p, 0)$.
Si $p \neq p'$, et si $(x, y) \in D_p$ alors $x+y = p \neq p'$ donc $(x, y) \notin D_{p'}$. Ainsi $D_p \cap D_{p'} = \emptyset$.
Pour tout (x, y) de $\mathbb{N}^2$, on a $(x, y) \in D_{x+y}$. Ainsi $\bigcup\limits_{p \geq 0} D_p = \mathbb{N}^2$.

Conclusion : les D_p sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion donne $\mathbb{N}^2$. Ils forment donc une partition de $\mathbb{N}^2$.

Remarque : La relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$ est une relation d'équivalence. Les D_p consituent les classes d'équivalence de $\mathbb{N}^2$ pour cette relation. Il est donc normal qu'ils forment une partition de $\mathbb{N}^2$. [Q]

(b) On a $D_p = \{(j, p-j), j = 0\,..\,p\}$, donc $d_p = p + 1$.
De plus $S_p = \bigcup\limits_{j<p} D_j$ pour tout $p \geq 1$, et c'est une union disjointe.
On en déduit que : $s_p = \sum\limits_{j=0}^{p-1} d_j = \sum\limits_{j=1}^{p} j = \frac{p(p+1)}{2}$ (vrai si $p = 0$ car $S_0 = \emptyset$.) [Q]

2. (a) Pour tous x, y de $\mathbb{N}$, l'entier $(x+y)(x+y+1)$ est pair, donc $f(x, y)$ est dans $\mathbb{N}$. [Q]

(b) On a $f(x, y) = x + s_{x+y}$ et $s_{x+y} \leq x + s_{x+y} < x + y + 1 + s_{x+y}$.
On constate d'autre part que $x + y + 1 + s_{x+y} = s_{x+y+1}$.
On a donc obtenu $s_{x+y} \leq f(x, y) < s_{x+y+1}$, pour tous x, y dans $\mathbb{N}$. [Q]

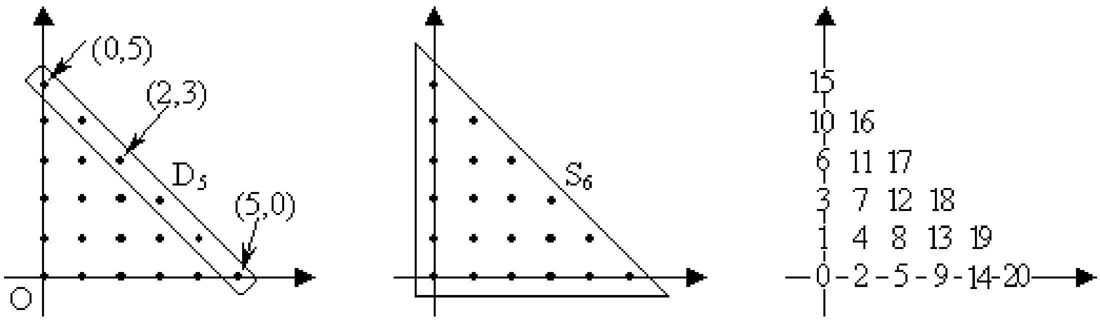
(c) En utilisant ce qui précède, on trouve $s_{x+y} \leq f(x, y) = f(x', y') < s_{x'+y'+1}$.
La suite $(s_p)_{p\geq 0}$ est strictement croissante, donc $x+y < x'+y'+1$, càd : $x+y \leq x'+y'$.
Par symétrie du problème, on trouve $x' + y' \leq x + y$, donc $x + y = x' + y'$.
Posons $p = x + y = x' + y'$. On a $f(x, y) = x + \frac{p(p+1)}{2}$ et $f(x', y') = x' + \frac{p(p+1)}{2}$.
Puisque $f(x, y) = f(x', y')$, il vient $x = x'$, puis $y = p - x = p - x' = y'$.
Ainsi $f(x, y) = f(x', y') \Rightarrow (x, y) = (x', y')$: l'application f est injective. [Q]

(d) Fixons n dans $\mathbb{N}$, et soit A l'ensemble des entiers naturels p tels que $s_p \leq n$.
Puisque $s_0 = 0 \leq n$, l'ensemble A est non vide (il contient 0.)
Pour tout p de $\mathbb{N}$, on a $d_{p-1} = p \leq s_p$. Si p est dans A, on a donc $p \leq s_p \leq n$.
Puisque A est non vide et majoré (par n) dans $\mathbb{N}$, il a un plus grand élément p.
Avec cette définition, on a : $p \in A$ et $(p + 1) \notin A$, donc $s_p \leq n < s_{p+1}$.
Pour tout autre entier p', on a $s_{p'+1} \leq s_p$ (si $p' < p$) et $s_{p+1} \leq s_{p'}$ (si $p < p'$).
Cela prouve l'unicité de l'entier p vérifiant $s_p \leq n < s_{p+1}$. [Q]

(e) Avec les notations précédentes, posons $x = n-s_p$ et $y = s_{p+1}-n-1$.
On remarque que $x + y = s_{p+1} - s_p - 1 = p$, donc $f(x, y) = x + s_p = n$.
Ainsi l'entier n (quelconque dans $\mathbb{N}$) possède un antécédent par f.
Il en découle que f est surjective, donc bijective (de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.) [Q]

(f) Empiriquement, $s_{44} = 22 \cdot 45 = 990$ et $s_{45} = s_{40} + 45 = 1035$. Ainsi $s_{44} \leq 1000 < s_{45}$.
Il en découle que $f(x, y) = 1000$, avec : $x = 1000 - s_{44} = 10$ et $y = s_{45} - 1001 = 34$.
L'antécédent de 1000 par f est donc $(10, 34)$. [Q]

(g) On a représenté ci-dessous les ensembles D_5 et $S_6 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$.
On a ensuite remplacé chacun des points de S_6 par son image par f.
On voit que le rôle de f consiste à numéroter les points de $\mathbb{N}^2$, on procédant par « diagonales» successives. Sur chaque diagonale D_p (constituée des points (x, y) tels que $x + y = p$) on numérote suivant les valeurs croissantes de l'abscisse x.



[Q]

3. (a) Tout d'abord l'application g est bien définie sur $\mathbb{N}^3$ est elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit n un entier naturel et (x, y, z) un élément de $\mathbb{N}^3$.
f étant bijective, il existe un unique (a, b) de $\mathbb{N}^2$ tel que $f(a, b) = n$.
On en déduit alors les équivalences : $f(x, y, z) = n \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = n \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ f(y, z) = b \end{cases}$
De même il existe un unique (c, d) de $\mathbb{N}^2$ tel que $f(c, d) = b$.
Donc $g(x, y, z) = n \Leftrightarrow (x = a, y = b, z = c)$: n a un antécédent unique par g.
L'application g est donc une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$. [Q]

(b) On sait que $(10, 34)$ est l'unique antécédent de 1000 par f.
On en déduit $g(x, y, z) = 1000 \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = 1000 \Leftrightarrow (x = 10$ et $f(y, z) = 34.)$
On constate que $f(6, 1) = 34$ par essais successifs, ou comme dans la question $(2f)$.
On en déduit que l'unique antécédent de 1000 par g est $(10, 6, 1)$. [Q]

4. (a) On trouve immédiatement :
– $\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2,\ f_2(x_1, x_2) = f(x_1, f_1(x_2)) = f(x_1, x_2)$. Donc $f_2 = f$.
– $\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3,\ f_3(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, f_2(x_2, x_3))) = f(x_1, f(x_2, x_3))$.
Ainsi $f_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$ et f_3 n'est autre que l'application g.
[Q]

(b) Par construction, chaque f_k est bien une application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$.
Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ « $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est bijective ».
Cette propriété est évidente si $k = 1$ (car $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$), et vraie si $k = 2$ car $f_2 = f$.
On se donne donc un entier $k \geq 2$ et on suppose que $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que f_k est bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. On pose l'équation (E) : $f_k(x_1, \ldots, x_k) = n$ (avec $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathbb{N}$.)
Par définition $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, y_1)$ avec $y_1 = f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k)$.
(E) devient $f(x_1, y_1) = n$, qui détermine x_1, y_1 de façon unique car f est bijective.
Connaissant cet entier y_1, il reste l'égalité $f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) = y_1$, qui détermine $x_2, \ldots, x_k$ de façon unique car f_{k-1} est bijective (hypothèse de récurrence.)

Ainsi tout n de $\mathbb{N}$ possède un antécédent unique par l'application f_k.
On a donc démontré la propriété au rang k, ce qui achève la récurrence.
Conclusion : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'application f_k est bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [Q]

(c) Par récurrence sur $k \geq 2$, montrons la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f_k(0,\ldots,0,1) = 1$ »
La propriété est vraie si $k = 2$ car $f_2(0,1) = f(0,1) = 1$.
On se donne $k \geq 2$ tel que $f_k(0,\ldots,0,1) = 1$.
Alors $f_{k+1}(0,\ldots,0,1) = f(0, f_{k-1}(0,\ldots,0,1)) = f(0,1) = 1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.
On a donc $f_k(0,\ldots,0,1) = 1$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
On en déduit successivement, pour tout entier $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} f_k(10,6,0,\ldots,0,1) &= f(10, f(6, f_{k-2}(0,\ldots,0,1))) \\ &= f(10, f(6,1)) = f(10,34) = 1000 \end{aligned}$$

Ainsi l'antécédent de 1000 par f_k est $(10,6,0,\ldots,0,1)$. [Q]

5. h est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Puisque φ est surjective, il doit exister un entier p tel que $h = \varphi(p) = \varphi_p$.
Cela signifie que pour tout entier n, on a $h(n) = \varphi_p(n)$ donc $\varphi_n(n) + 1 = \varphi_p(n)$.
On voit bien que pour $n = p$ cette égalité est absurde.
On en conclut qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
En particulier il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}$. [Q]

6. (a) On procède par récurrence sur q, le pas initial étant $q = n$.
La propriété est évidente si $q = n$ car $\displaystyle\sum_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_n^n = 1$ qui est égal à C_{q+1}^{n+1}.
On se donne un entier $q \geq n$, et on suppose que la propriété est vraie au rang q.
On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{q+1} \mathrm{C}_m^n &= \sum_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n + \mathrm{C}_{q+1}^n = \mathrm{C}_{q+1}^{n+1} + \mathrm{C}_{q+1}^n \ (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \mathrm{C}_{q+2}^{n+1} \ (\text{propriété caractéristique du triangle de Pascal}) \end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $q+1$ et achève la récurrence. [Q]

(b) L'égalité $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^k$ est vraie si $k = 1$ car elle se réduit à $s(1,p) = \mathrm{C}_p^1 = p$.
On a en effet $S_{1,p} = \{x_1 \in \mathbb{N}, x_1 < p\} = \{0,1,\ldots,p-1\}$ donc $s(1,p) = p$.
On se donne maintenant un entier $k \geq 1$.
On suppose que la propriété est vraie au rang k (hypothèse de récurrence.)
Se donner un élément quelconque $(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$ de $S_{k+1,p}$ c'est :
– Se donner un entier x_{k+1} quelconque dans l'ensemble $\{0,1,\ldots,p-1\}$.
– Puis se donner entiers $x_1,\ldots,x_k$ tels que $x_1 + \ldots + x_k < p - x_{k+1}$.
Cela revient à se donner $(x_1,\ldots,x_k)$ dans $S_{k,q}$ avec $q = p - x_{k+1}$.

Quand x_{k+1} varie de 0 à $p-1$, alors $q = p - x_{k+1}$ varie de 1 à p.

Ce dénombrement permet d'écrire l'égalité $s(k+1,p) = \sum_{q=1}^{p} s(k,q)$.

On sait que $s(k,q) = \mathrm{C}_{k+q-1}^{k}$ (hypothèse de récurrence) pour tout entier q.

En utilisant (a), on en déduit $s(k+1,p) = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{C}_{k+q-1}^{k} = \sum_{m=k}^{k+p-1} \mathrm{C}_{m}^{k} = \mathrm{C}_{k+p}^{k+1}$.

Ce résultat prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

On a donc prouvé l'égalité $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^{k}$ pour tout $k \geq 1$ et tout $p \geq 0$.

Remarque : on retrouve le résultat de (1b), $s_p = s(2,p) = \mathrm{C}_{p+1}^{2} = \frac{p(p+1)}{2}$. [Q]

(c) L'ensemble $S_{k,p+1}$ est l'union disjointe de $S_{k,p}$ et de $D_{k,p}$.
Ainsi $s(k,p+1) = s(k,p) + d(k,p)$.
On en déduit $d(k,p) = s(k,p+1) - s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p}^{k} - \mathrm{C}_{k+p-1}^{k} = \mathrm{C}_{k+p-1}^{k-1}$.
On retrouve par exemple $d_p = d(2,p) = \mathrm{C}_{p+1}^{1} = p+1$. [Q]

(d) En utilisant la propriété caractéristique du triangle de Pascal, on trouve :
$s(k,p+1) + s(k+1,p) = \mathrm{C}_{k+p}^{k} + \mathrm{C}_{k+p}^{k+1} = \mathrm{C}_{k+p+1}^{k+1} = s(k+1,p+1)$. [Q]

(e) Si $p < p'$, on a $s(k,p) < s(k,p')$ car $S(k,p)$ est strictement inclus dans $S(k,p')$.
En effet toute solution de $x_1 + \ldots + x_k < p$ est aussi solution de $x_1 + \ldots + x_k < p'$.
D'autre part, $(p, 0\ldots,0)$ est dans $S_{k,p'}$ mais pas dans $S_{k,p}$. [Q]

7. (a) – On trouve immédiatement $g_1(x_1) = s(1,x_1) = \mathrm{C}_{x_1}^{1} = x_1$.

Ainsi g_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

– On trouve $g_2(x_1,x_2) = x_1 + s(2,x_1+x_2) = x_1 + \mathrm{C}_{x_1+x_2+1}^{2} = x_1 + \dfrac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2}$

On constate que g_2 n'est autre que l'application f (ou encore f_2).

– On trouve enfin :

$$\begin{aligned} g_3(x_1,x_2,x_3) &= g_2(x_1,x_2) + \mathrm{C}_{x_1+x_2+x_3+2}^{3} \\ &= x_1 + \frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2!} + \frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3+1)(x_1+x_2+x_3+2)}{3!} \end{aligned}$$

On sait que $g(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,y) = x_1 + \dfrac{(x_1+y)(x_1+y+1)}{2}$, avec $y = f(x_2,x_3)$.

Le terme dominant en x_1 dans $g(x_1,x_2,x_3)$ est $\frac{x_1^2}{4}$ (y ne dépend pas de x_1.)

En revanche le terme dominant en x_1 dans $g_3(x_1,x_2,x_3)$ est $\frac{x_1^3}{6}$.

Cette différence suffit à prouver que g_3 est distincte de g (c'est-à-dire de f_3.) [Q]

(b) L'inégalité $s(k, x_1 + \ldots + x_k) \leq g_k(x_1,\ldots,x_k)$ est évidente et résulte de (E).

On va montrer $g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k, x_1 + \ldots + x_k + 1)$ par récurrence sur k.

Cette inégalité est évidente si $k = 1$ car $g_1(x_1) = x_1$ et $s(1, x_1+1) = x_1 + 1$.

On suppose qu'elle est vraie pour un rang $k \geq 1$ donné.

On a alors successivement (les justifications sont données après) :

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) &= g_k(x_1,\ldots,x_k)+s(k{+}1,x_1+\cdots+x_{k+1}) && (i)\\ &< s(k,x_1{+}\cdots{+}x_k{+}1)+s(k{+}1,x_1{+}\cdots{+}x_{k+1}) && (ii)\\ &\le s(k,x_1{+}\cdots{+}x_k{+}x_{k+1}{+}1)+s(k{+}1,x_1{+}\cdots{+}x_{k+1}) && (iii)\\ &= s(k{+}1,x_1{+}\cdots{+}x_k{+}x_{k+1}{+}1) && (iv)\end{aligned}$$

Finalement $g_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) < s(k{+}1,x_1{+}\cdots{+}x_k{+}x_{k+1}{+}1)$.

Voici les justifications des étapes précédentes :

(i) C'est la remarque notée (E) dans l'énoncé.

(ii) C'est l'hypothèse de récurrence.

(iii) On utilise le fait que $p \le p' \Rightarrow s(k,p) \le s(k,p')$ (question (6e)).

(iv) On utilise ici la question (6d), avec $p = x_1+\cdots+x_{k+1}$.

On a ainsi démontré la propriété au rang $k+1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

(c) On suppose donc que $g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_k(x'_1,\ldots,x'_k)$.
La question précédente donne alors :

$$s(k,x_1+\ldots+x_k) \le g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_k(x'_1,\ldots,x'_k) < s(k,x'_1+\ldots+x'_k+1)$$

On obtient donc : $s(k,x_1+\ldots+x_k) < s(k,x'_1+\ldots+x'_k+1)$.
Mais on se souvient que la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante.
Il en découle l'inégalité $x_1+\ldots+x_k \le x'_1+\ldots+x'_k$.
Par symétrie du problème, on a aussi l'inégalité inverse.
On a donc prouvé l'égalité $x_1+\ldots+x_k = x'_1+\ldots+x'_k$. [Q]

(d) Montrons par récurrence sur k que les applications g_k sont injectives.
La propriété est vraie si $k=1$ car g_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$.
Soit $k \ge 2$ tel que g_{k-1} soit injective. Montrons que g_k est injective.
Pour cela, on se donne $(x_1,\ldots,x_k)$ et $(x'_1,\ldots,x'_k)$ tels que $g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_k(x'_1,\ldots,x'_k)$.
La question précédente donne l'égalité (E') : $x_1+\ldots+x_k = x'_1+\ldots+x'_k$.
Mais on sait (en réécrivant l'égalité (E) indiquée dans l'énoncé) que :

$$\begin{cases} g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) + s(k,x_1+\cdots+x_k)\\ g_k(x'_1,\ldots,x'_k) = g_{k-1}(x'_1,\ldots,x'_{k-1}) + s(k,x'_1+\cdots+x'_k)\end{cases}$$

Par différence membre à membre, on obtient $g_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) = g_{k-1}(x'_1,\ldots,x'_{k-1})$.
L'hypothèse de récurrence (g_{k-1} injective) donne alors $(x_1,\ldots,x_{k-1}) = (x'_1,\ldots,x'_{k-1})$.
L'égalité (E') fournit enfin $x_k = x'_k$.
Conclusion : on a prouvé que g_k est injective, ce qui achève la récurrence. [Q]

(e) On sait que : $s(k,x_1+\ldots+x_k) \le g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,x_1+\ldots+x_k+1)$.
On sait aussi que la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante.
On en déduit que l'inégalité $g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,p)$ équivaut à $x_1+\ldots+x_k < p$.
Autrement dit $g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,p) \Leftrightarrow (x_1,\ldots,x_k) \in S_{k,p}$.
Ce résultat montre que g_k envoie l'ensemble $S_{k,p}$ (dont le cardinal est $s(k,p)$) sur l'intervalle d'entiers $I_{k,p} = [0,..,s(k,p)[$ (dont le cardinal est également $s(k,p)$.)

La restriction de g_k à $S_{k,p}$ est donc injective (car g_k est injective) de $S_{k,p}$ dans $I_{k,p}$.
Puisque ces deux ensembles ont même cardinal, cette restriction est une bijection.

Ainsi tout élément de $I_{k,p}$ possède un antécédent (et un seul) dans $S_{k,p}$.
Enfin, tout entier n figure dans un $I_{k,p}$, pour p assez grand, car $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{k,p} = +\infty$.

Tout n de $\mathbb{N}$ possède donc un antécédent (et un seul par injectivité) dans $\mathbb{N}^k$.

Conclusion : l'application g_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [Q]