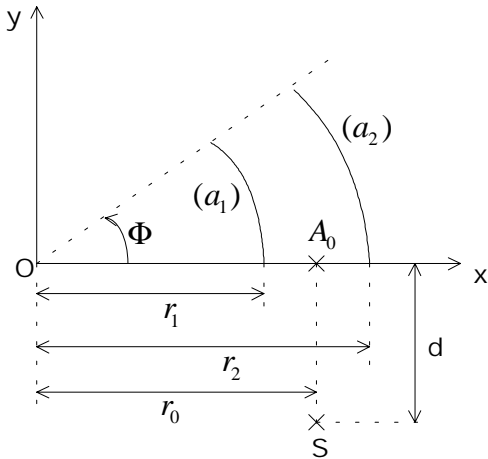


MECANIQUE DU POINT MATERIEL
EXERCICE D' ORAL

-EXERCICE 13.6-

• **ENONCE :**

« Focalisation de particules par une lentille électrostatique »



Des particules non-relativistes de charge q sont émises par une source (S) : l'enceinte étant supposée à l'équilibre thermique, toutes les particules ont la même énergie cinétique. Les trajectoires étudiées sont situées dans le plan xOy ci-contre.

Les particules sont classées en 4 types:

type P_0 : masse m_0 , vitesse initiale de norme v_0 , dirigée suivant Oy .

type P_{α} : masse m_0 , vitesse initiale de norme v_0 , faisant un angle α très petit avec Oy .

type P_1 : masse m_1 , vitesse initiale de norme v_1 , dirigée suivant Oy .

type P_{α} : masse m_1 , vitesse initiale de norme v_1 , faisant un angle α très petit avec Oy .

• Par analogie avec l'optique géométrique, on va réaliser un dispositif permettant de faire converger toutes ces particules en un point (S'), conjugué de (S) par ce dispositif, appelé « lentille électrostatique » : ceci n'est possible que pour des particules ayant des vitesses initiales peu inclinées par rapport à l'axe Oy , condition équivalente à l'Approximation de Gauss.

• Le système est constitué d'un secteur de condensateur cylindrique d'angle d'ouverture Φ ; l'armature interne (a_1), de rayon r_1 , est au potentiel nul, tandis que l'armature externe (a_2), de rayon r_2 , est au potentiel $U > 0$. La hauteur h (selon l'axe Oz) du condensateur est très supérieure à r_2 ; par ailleurs, on pose : $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ et $\Delta r = r_2 - r_1$.

1) En négligeant les effets de bord, déterminer la topologie du champ électrique \vec{E} entre les armatures.

2) En notant E_0 la valeur algébrique du champ électrique à la distance r_0 du point O, exprimer la valeur algébrique du champ en un point M situé entre les armatures à la distance r du point O, ceci en fonction de r, r_0 et E_0 .

Exprimer ce champ en fonction de U, r, r_1 et r_2 .

3) Donner l'expression de U pour qu'une particule de type (P_0) suive dans le condensateur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0 (dans la suite du problème, U **conservera cette expression**).

Que devient cette expression pour $\Delta r \ll r_0$?

4) Quelle est la trajectoire d'une particule de type (P_1) ?

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

• On veut étudier la trajectoire d'une particule de type (P_0) , ou (P_1) entre les armatures ; cette particule pénètre dans le condensateur au point (A_0) .

La position de la particule est repérée en coordonnées polaires d'origine O et d'axe polaire Ox ; l'origine des temps est prise à l'instant où la particule est en (A_0) .

5) Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule dans le condensateur.

6) On pose : $r(t) = r_0[1 + \varepsilon(t)]$, avec $|\varepsilon(t)| \ll 1$; à partir d'un développement limité au 1^{er} ordre en α et ε (considérés comme des infiniment petits du même ordre), écrire l'équation différentielle régissant $\varepsilon(t)$.

En déduire l'expression de $\varepsilon(t)$ (on pourra constater que α et ε sont bien du même ordre).

7) En déduire l'expression de l'angle polaire $\theta(t)$, que l'on mettra sous la forme :

$$\theta(t) = at + \alpha[bt + c(1 - \cos \omega t)]$$

Quel est l'intérêt de cette mise en forme ?

• On étudie la convergence du faisceau de particules en sortie du condensateur ; les trajectoires en sortie sont des droites (D_α) dépendant de α , (D_0) étant celle obtenue pour $\alpha = 0$: (D_0) et (D_α) se coupent au point (S') , à une distance d' du plan de sortie du condensateur.

8) Compte tenu des approximations précédentes, calculer en fonction de α, r_0, d, v_0 et Φ :

♦ l'instant t_1 de sortie d'une particule entrée à l'instant 0 dans le condensateur (on justifiera le fait que l'on peut se contenter d'une expression de t_1 à l'ordre 0).

♦ la distance de sortie $r(t_1)$.

♦ les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse de sortie.

9) En déduire l'expression de d' ; en conclure que le dispositif permet effectivement la convergence du faisceau pour un angle Φ supérieur à une valeur que l'on précisera.

Dans quel cas obtient-on un faisceau parallèle en sortie ?

Rq1 : pour les étudiants n'ayant pas encore abordé l'électrostatique, on donne les résultats des deux premières questions, soit :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r, \text{ avec } E(r) < 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{U}{\text{Ln}(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Rq2 : cet exercice est inspiré d'un problème de concours, et est bien sûr trop long pour être posé entièrement à l'oral.