

Podaires d'une parabole

On se place dans le plan \mathbb{R}^2 , muni de sa structure canonique de plan euclidien orienté.

On note \mathcal{P} la parabole d'équation $y^2 = 2x$, et F le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ (le *foyer* de \mathcal{P} .)

Une représentation paramétrique de \mathcal{P} s'écrit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Première partie

On oriente la parabole \mathcal{P} dans le sens des t croissants (donc dans le sens des ordonnées croissantes.)

On fixe l'origine des abscisses curvilignes en O (donc au sommet de la parabole.)

1. Calculer l'abscisse curviligne s du point $M(t)$.

Préciser la base de Frenet au point $M(s)$. [S]

2. Calculer le rayon de courbure R au point $M(s)$.

Soit $\Omega(t)$ le centre de courbure de \mathcal{P} en $M(t)$.

Montrer que les coordonnées de $\Omega(t)$ sont données par $\begin{cases} x_{\Omega}(t) = 1 + \frac{3}{2}t^2 \\ y_{\Omega}(t) = -t^3 \end{cases}$ [S]

3. On note \mathcal{Q} la courbe décrite par $\Omega(t)$ quand t décrit \mathbb{R} (c'est la *développée* de \mathcal{P} .)

Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe \mathcal{Q} est : $y^2 = \frac{8}{27}(x-1)^3$.

Vérifier que toute normale à \mathcal{P} est une tangente à \mathcal{Q} .

Représenter conjointement les courbes \mathcal{P} et \mathcal{Q} . [S]

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on désigne par $A(a, b)$ un point fixé du plan.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 \geq 2x$ est appelé *extérieur* de \mathcal{P} .

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 > 2x$ est l'*extérieur strict* de \mathcal{P} .

On définit aussi l'intérieur ($y^2 \leq 2x$) et l'intérieur strict ($y^2 < 2x$) de \mathcal{P} .

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M(t)$ de \mathcal{P} . [S]

2. Soit $H(t)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.

Montrer que les coordonnées de $H(t)$ sont données par :

$$X(t) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} \quad \text{et} \quad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2+1)}$$

Quand t décrit \mathbb{R} , le point $H(t)$ décrit une courbe notée Γ_A ou $\Gamma(a, b)$.

On dit que Γ_A est la *podaire* de \mathcal{P} par rapport à A . [S]

3. Montrer que la courbe Γ est toute entière incluse dans l'extérieur de \mathcal{P} . [S]

4. Montrer que $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ se déduisent l'une de l'autre par une symétrie.

Que peut-on dire, en particulier, des courbes $\Gamma(a, 0)$? [S]

5. Décrire Γ_A quand $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. On fera une figure illustrant cette situation. [S]

Troisième partie

On garde les notations des parties I et II.

On va procéder à des études locales des podaires de la parabole \mathcal{P} . Dans cette partie, plusieurs questions ont des réponses géométriques simples, que l'on préférera bien sûr à des débauches de calculs.

- Préciser le placement de Γ_A par rapport à sa branche infinie et illustrer les différents cas (on pourra se limiter à $b \geq 0$, avec $A \neq F$.) [S]
- Montrer que A appartient à Γ_A si et seulement si A est extérieur à \mathcal{P} . [S]
 - Montrer que si Γ_A présente un point double B , alors nécessairement $B = A$. [S]
 - Inversement montrer que A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à \mathcal{P} . [S]
- On suppose que $A(a, b)$ est strictement extérieur à \mathcal{P} . Montrer que les deux tangentes à Γ_A au point A sont respectivement orthogonales aux deux tangentes à \mathcal{P} menées par A . [S]
 - Si $A(a, b)$ est sur \mathcal{P} , Montrer que la tangente en A à Γ_A est la normale en A à \mathcal{P} . [S]
- Dans cette question, on va utiliser le paramétrage de \mathcal{P} par une abscisse curviligne s , comme on l'a vu dans la partie I. Le point $M(t)$ sera aussi noté $M(s)$ en référence à ce paramétrage.

On notera $R(s)$ le rayon de courbure à la parabole \mathcal{P} au point $M(s)$.

On notera aussi $\mathcal{D}(s)$ la tangente à \mathcal{P} en $M(s)$, et $H(s)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(s)$.

L'abscisse curviligne s de \mathcal{P} définit donc aussi une représentation paramétrique de la podaire Γ_A (mais attention : ce n'est pas une abscisse curviligne sur Γ_A .)

- Pour tout s , justifier l'égalité $H(s) = M(s) + \lambda(s)\vec{T}(s)$, avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s))$. [S]
 - On désigne par $\overrightarrow{H'(s)}$ le vecteur dérivé, par rapport à s , de la position du point $H(s)$.
Montrer que $\overrightarrow{H'(s)} = \frac{1}{R(s)} \left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{N}(s)) \vec{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s)) \vec{N}(s) \right]$ [S]
 - Prouver que si A n'appartient pas à \mathcal{P} , alors la courbe Γ_A est sans point stationnaire. [S]
 - Prouver que si A appartient à \mathcal{P} , alors A est le seul point stationnaire de Γ_A . [S]
- Dans cette question, on suppose que le point $A(a, b)$ est quelconque.
Pour tout réel m , soit Δ_m la droite passant par A , de coefficient directeur m .
 - Montrer que Δ_m est normale à \mathcal{P} si et seulement si $m^3 + 2(1-a)m + 2b = 0$.
Il est donc clair que par A passent au moins une et au plus trois normales distinctes à \mathcal{P} . [S]
 - Discuter le nombre n_A de normales à \mathcal{P} qui passent par $A(a, b)$.
On montrera en particulier que $n_A = 3 \Leftrightarrow a > 1$ et $|b| < (\frac{2}{3}(a-1))^{3/2}$.
Faire une figure représentant les trois normales issues de $A(15/2, 6)$. [S]
 - Soit $M(t_0)$ le pied sur \mathcal{P} de l'une quelconque des normales à \mathcal{P} passant par A , avec $M(t_0) \neq A$.
Montrer que $M(t_0)$ est un point de Γ_A et préciser la tangente en Γ en ce point.
Indication : utiliser les notations de la question III.4.
On pourra rapidement illustrer deux cas de figure avec un point A à partir duquel on peut mener trois normales à \mathcal{P} (A étant successivement intérieur puis extérieur à \mathcal{P} .) [S]

Quatrième partie

Cette partie est consacrée à l'étude des points d'inflexion éventuels de la courbe Γ_A .

Pour cela, on reprend les notations de la question III4, et en particulier les résultats de III4a et III4b.

1. En dérivant par rapport à s l'égalité obtenue dans III4b, prouver que :

$$R'(s)\overrightarrow{H'(s)} + R(s)\overrightarrow{H''(s)} = \frac{2}{R(s)} \left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s)) \overrightarrow{N}(s) - (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s)) \overrightarrow{T}(s) \right] - \overrightarrow{N}(s) \quad [\text{S}]$$

2. Par un calcul dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$, en déduire :

$$R^3(s) \det(\overrightarrow{H'(s)}, \overrightarrow{H''(s)}) = 2\|\overrightarrow{AM(s)}\|^2 + (\overrightarrow{AM(s)} \mid R(s)\overrightarrow{N}(s)) \quad [\text{S}]$$

3. On définit le polynôme $P_A(t) = bt^3 + \frac{3}{2}(1-2a)t^2 - 3bt + 2a^2 + 2b^2 - a$.

Montrer que $H(t_0)$ est un point d'inflexion de Γ_A si P_A s'annule en changeant de signe en t_0 . [S]

4. Dans cette question uniquement, on suppose $b = 0$.

Discuter suivant a le nombre de points d'inflexion sur Γ_A . [S]

5. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.

(a) Vérifier que la dérivée P'_A de P_A s'annule en deux points distincts t_1 et t_2 . [S]

(b) Effectuer la division euclidienne de P_A par P'_A . [S]

(c) En déduire qu'on a l'égalité $P_A(t_1)P_A(t_2) = 4\|\overrightarrow{AF}\|^4 \left(1 - \frac{2a}{b^2}\right)$. [S]

(d) Discuter le nombre d'inflexions de Γ_A suivant la position de A par rapport à \mathcal{P} . [S]

6. On se propose de trouver les points d'inflexion par une autre méthode.

Pour cela on va trouver une caractérisation pour que trois points de Γ_A soient alignés.

(a) On se donne trois points $H(t_1), H(t_2), H(t_3)$ de Γ_A , de paramètres t_1, t_2, t_3 distincts.

$$\text{On note } \begin{cases} \sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ \sigma_3 = t_1t_2t_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} X(t_1) & X(t_2) & X(t_3) \\ Y(t_1) & Y(t_2) & Y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Montrer que $H(t_1), H(t_2), H(t_3)$ sont alignés $\Leftrightarrow 2b(\sigma_1 - \sigma_3) + (2a - 1)\sigma_2 = 4a^2 + 4b^2 - 2a$. [S]

(b) On admet qu'une droite \mathcal{D} du plan est une tangente d'inflexion de la courbe Γ_A si l'équation aux points d'intersection de cette droite avec Γ_A admet une racine triple.

Avec cette idée, retrouver la condition pour que $H(t)$ soit un point d'inflexion sur Γ_A . [S]

Cinquième partie

Dans cette partie, on étudie et on trace quelques courbes Γ_A . Dans chaque cas, on précisera l'asymptote, et le cas échéant les points doubles, les points stationnaires et les points d'inflexion.

1. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (-5/2, 0)$. [S]

2. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (0, 0)$. [S]

3. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 0)$. [S]

4. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 2)$. [S]

5. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 4)$. [S]

6. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 6)$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. L'abscisse curviligne de $M(t)$ est $s = \int_0^t \|\overrightarrow{OM'(u)}\| du = \int_0^t \sqrt{u^2 + 1} du$.

On intègre par parties (autre méthode : poser $u = \text{sh } \varphi$.)

$$I = \int_0^t \sqrt{u^2 + 1} du = \left[u\sqrt{u^2 + 1} \right]_0^t - \int_0^t \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 + 1}} = t\sqrt{t^2 + 1} - I + \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

On en déduit $s = \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$

On a $\frac{ds}{dt} = \sqrt{t^2 + 1}$, puis $\overrightarrow{T}(s) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. [Q]

2. On trouve $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{-t}{(t^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{(t^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$.

On connaît l'égalité $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}$. On en déduit $R(s) = -(t^2 + 1)^{3/2}$.

On a $\Omega(t) = M(t) + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} - (t^2 + 1) \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix}$. [Q]

3. Puisque $x_\Omega = 1 + \frac{3}{2}t^2$ et $y_\Omega = -t^3$, on a : $y_\Omega^2 = t^6 = (t^2)^3 = \left(\frac{2}{3}(x_\Omega - 1)\right)^3 = \frac{8}{27}(x_\Omega - 1)^3$.

Réciproquement, soit $B(x, y)$ un point de la courbe d'équation $y^2 = \frac{8}{27}(x - 1)^3$.

Posons $t = -y^{1/3}$, donc $y = -t^3$. On a $\frac{8}{27}(x - 1)^3 = y^2 = t^6 = (t^2)^3$ donc $\frac{2}{3}(x - 1) = t^2$.

Ainsi $x = 1 + \frac{3}{2}t^2$ et $B = (1 + \frac{3}{2}t^2, -t^3)$ est le point $\Omega(t)$.

Conclusion : la courbe \mathcal{Q} a pour équation cartésienne $y^2 = \frac{8}{27}(x - 1)^3$.

Soit Δ la normale à \mathcal{P} en $M(t)$. Cette droite passe par $\Omega(t)$ et est dirigée par $(-1, t)$.

D'autre part $\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} = (3t, -3t^2) = -3t(-1, t)$.

Pour $t \neq 0$, la tangente en $\Omega(t)$ à \mathcal{Q} est donc également dirigée par $(-1, t)$.

Ceci est vrai aussi quand $t = 0$ (car la tangente en $\Omega(0) = (1, 0)$ à \mathcal{Q} est horizontale.)

Conclusion : la normale en $M(t)$ à la parabole \mathcal{P} est la tangente en $\Omega(t)$ à sa développée \mathcal{Q} .

Remarque : le résultat précédent est un cas particulier d'une propriété générale des développées.

La courbe \mathcal{Q} est la réunion des courbes $y = \left(\frac{2}{3}(x - 1)\right)^{3/2}$ et $y = -\left(\frac{2}{3}(x - 1)\right)^{3/2}$.

Ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

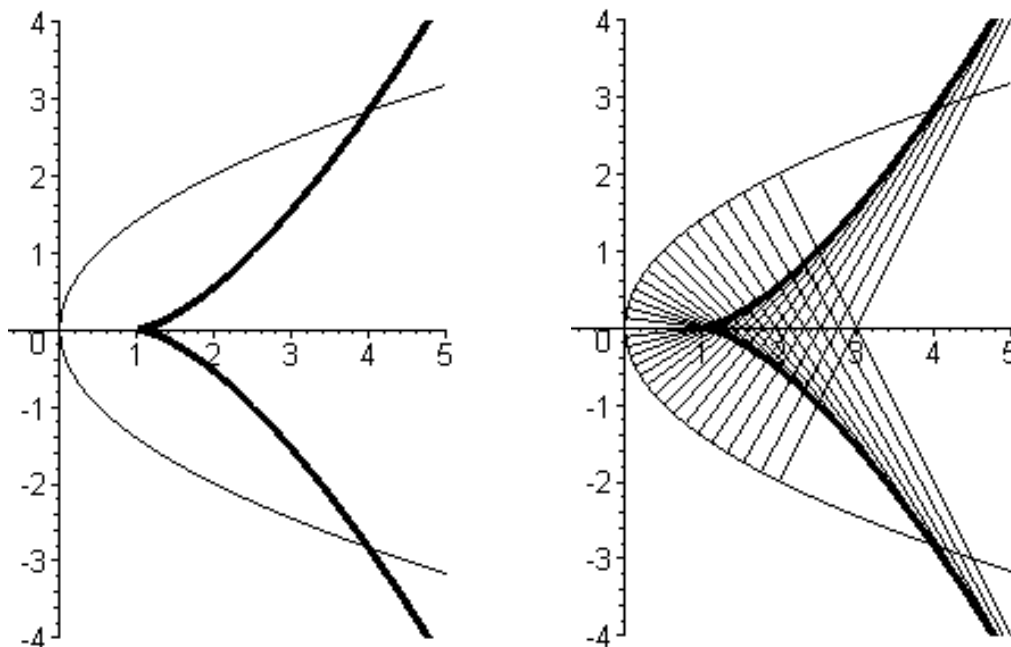
Leur tracé ne pose pas de problème : il y a une demi-tangente horizontale au point $\Omega(0) = (1, 0)$ (il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce pour la courbe \mathcal{Q} .)

On constate que \mathcal{Q} et \mathcal{P} se rencontrent en deux points symétriques par rapport à Ox .

Plus précisément, $\begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x - 1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 1)^3 - 27x = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Voici une partie de la représentation graphique de \mathcal{P} et de \mathcal{Q} (cette dernière en trait gras.)

A droite, on a représenté un certain nombre de normales à \mathcal{P} : ce sont toutes des tangentes à \mathcal{Q} .



[Q]

Deuxième partie

1. Pour tout réel t , un vecteur directeur de $\mathcal{D}(t)$ est $M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (t, 1)$.

Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(t)$ est donc :

$$\begin{vmatrix} X & x(t) & x'(t) \\ Y & y(t) & y'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & \frac{1}{2}t^2 & t \\ Y & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow X - tY + \frac{1}{2}t^2 = 0$$

[Q]

2. Un vecteur orthogonal à $M'(t) = (t, 1)$ est $v(t) = (-1, t)$.

Il existe un réel λ (dépendant de t) tel que $H(t) = A + \lambda v(t) = (a - \lambda, b + \lambda t)$.

On exprime que $H(t) = (X(t), Y(t))$ appartient à $\mathcal{D}(t)$:

$$X(t) - tY(t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda) - t(b + \lambda t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{t^2 - 2bt + 2a}{2(t^2 + 1)}$$

$$\text{On trouve } X(t) = a - \lambda = \frac{(2a - 1)t^2 + 2bt}{2(t^2 + 1)} \text{ et } Y(t) = b + \lambda t = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2 + 1)} \quad [\text{Q}]$$

3. On pourrait montrer l'inégalité $Y^2(t) \geq 2X(t)$ pour tout réel t , mais ce serait maladroit.

En fait Γ_A est incluse dans l'extérieur de \mathcal{P} parce que les points de Γ_A appartiennent à des tangentes à \mathcal{P} , et que celles-ci sont toutes dans l'extérieur de \mathcal{P} : c'est une conséquence de la convexité de l'application $y \mapsto \frac{1}{2}y^2$.

On peut aussi noter que l'équation de $\mathcal{D}(t)$ s'écrit $2X = 2tY - t^2$. Pour tout point (X, Y) de la droite $\mathcal{D}(t)$, on a donc $Y^2 - 2X = Y^2 - 2tY + t^2 = (Y - t)^2 \geq 0$. [Q]

4. Ox est axe de symétrie de \mathcal{P} . De même (a, b) et $(a, -b)$ sont symétriques par rapport à Ox .

Il est donc logique que $\Gamma(a, -b)$ se déduise de $\Gamma(a, b)$ dans la symétrie d'axe Ox .

Pour le vérifier notons $H(t) = (X(t), Y(t))$ sur $\Gamma(a, b)$ et $\tilde{H}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ sur $\Gamma(a, -b)$.

On constate que $\tilde{X}(t) = \frac{(2a-1)t^2 - 2bt}{2(t^2+1)} = X(-t)$ et $\tilde{Y}(t) = \frac{t^3 + 2at - 2b}{2(t^2+1)} = -Y(-t)$.

Les points $\tilde{H}(t)$ et $H(-t)$ sont donc symétriques par rapport à Ox .

Il en découle que les courbes $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ sont symétriques par rapport à cet axe.

En particulier Ox est axe de symétrie de chaque courbe $\Gamma(a, 0)$. [Q]

5. On suppose ici $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. Le point A est donc le *foyer* de la parabole.

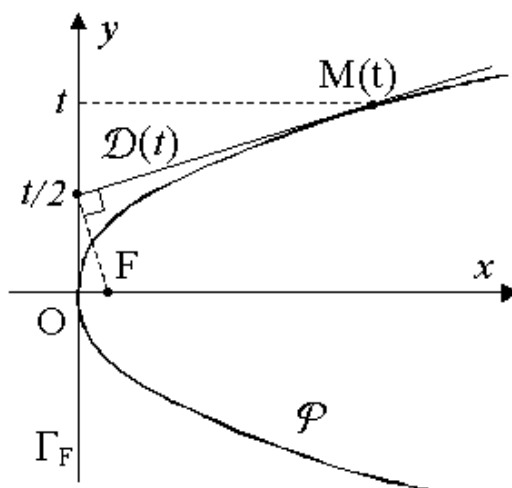
Dans ce cas, et pour tout réel t : $X(t) = 0$ et $Y(t) = \frac{t}{2}$.

La courbe Γ_A est donc la droite $x = 0$.

La podaire d'une parabole \mathcal{P} par rapport à son foyer est donc la tangente au sommet de \mathcal{P} .

La figure illustre la situation : la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M = (\frac{t^2}{2}, t)$ rencontre Oy en $H(t) = (0, \frac{t}{2})$.

Le point $H(t)$ est aussi la projection orthogonale du foyer F sur la tangente $\mathcal{D}(t)$.



[Q]

Troisième partie

1. Γ_A n'a qu'une branche infinie, quand $t \rightarrow \pm\infty$. On a alors $X(t) \sim a - \frac{1}{2}$ et $Y(t) \sim \frac{t}{2}$.

Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = a - \frac{1}{2}$.

D'autre part $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} - (a - \frac{1}{2}) = \frac{2bt - (2a-1)}{2(t^2+1)}$.

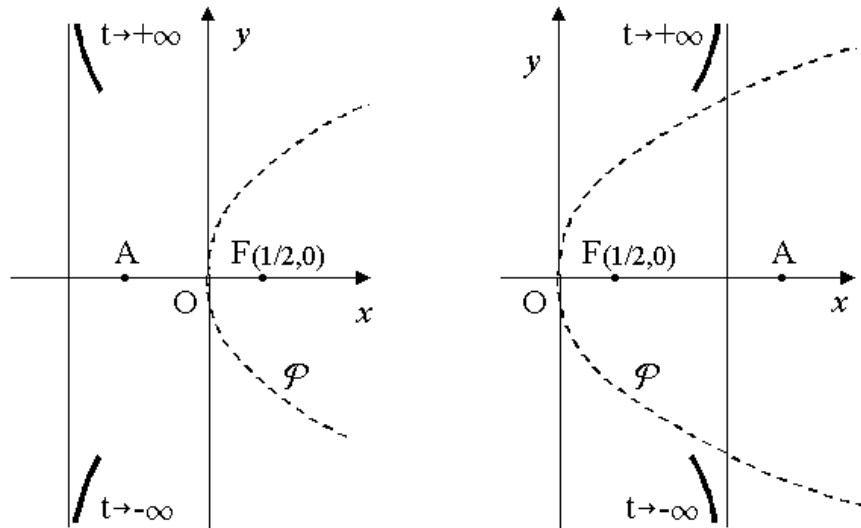
– Si $b = 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \frac{1-2a}{2(t^2+1)}$, qui a toujours le signe de $1-2a$.

La courbe est donc toujours à droite de son asymptote si $a < \frac{1}{2}$ et toujours à gauche sinon.

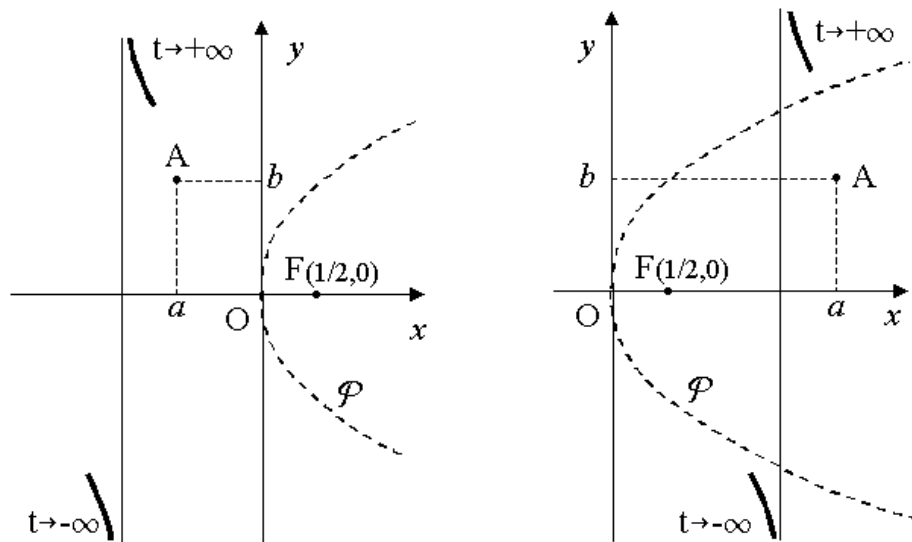
– Si $b > 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) \sim \frac{b}{t}$.

La courbe est donc à droite de son asymptote quand $t \rightarrow +\infty$, et à gauche sinon.

Voici une illustration du cas $b = 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis $b = 0$ et $a > \frac{1}{2}$.



Ensuite voici le cas $b > 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis le cas $b > 0$ et $a > \frac{1}{2}$.



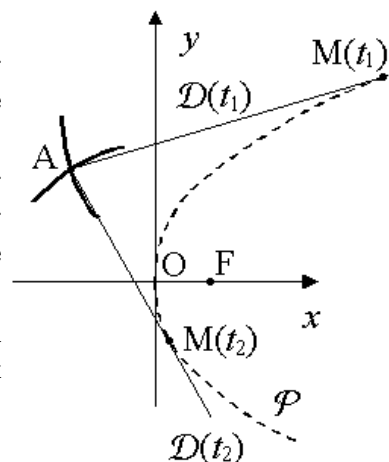
[Q]

2. (a) Dire que A appartient à Γ_A , c'est dire qu'il existe t tel que $A = H(t)$.
 Mais on sait que $H(t)$ est toujours la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
 Écrire que $A = H(t)$ c'est donc écrire que A appartient à la tangente $\mathcal{D}(t)$.
 On sait que l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ à \mathcal{P} en $M(t)$ est $2X - 2tY + t^2 = 0$.
 Cette tangente passe par $A(a, b)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
 Il s'agit d'une équation dont le discriminant est $\Delta' = b^2 - 2a$.
 Cette équation possède au moins une solution réelle t si et seulement si $b^2 \geq 2a$.
 Conclusion : A appartient à Γ_A si et seulement si $b^2 \geq 2a$, c'est-à-dire si seulement si A appartient à la parabole \mathcal{P} ($b^2 = 2a$) ou lui est strictement extérieur ($b^2 > 2a$). [Q]
- (b) Soit B un point de Γ_A . On suppose que B est distinct du point A .
 On suppose également qu'il existe t_1, t_2 tels que $B = H(t_1) = H(t_2)$.
 Ainsi le vecteur \overrightarrow{AB} est orthogonal à la fois à $\mathcal{D}(t_1)$ et à $\mathcal{D}(t_2)$.
 Ces deux droites (passant par B et orthogonales à $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$) sont donc confondues.
 Or $\mathcal{D}(t_1)$ est dirigée par $(t_1, 1)$, et $\mathcal{D}(t_2)$ par $(t_2, 1)$. Il en découle $t_1 = t_2$.
 Conclusion : le seul point double possible sur Γ_A est le point A . [Q]
- (c) Comme on l'a vu en (a), on a $A = H(t)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
 Le point A est un point double \Leftrightarrow cette équation possède deux solutions distinctes.
 Cela équivaut à dire que le discriminant $\delta' = b^2 - 2a$ est strictement positif.
 Donc A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow b^2 > 2a \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à \mathcal{P} . [Q]
3. (a) Notons t_1 et t_2 les deux réels distincts tels que $A = H(t_1) = H(t_2)$.
 On sait que pour $t \notin \{t_1, t_2\}$, on a $H(t) \neq A$ (car par A ne passent que deux tangentes à \mathcal{P}).
 On sait que $H(t)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$ (tangente à \mathcal{P} en $M(t)$).
 Le vecteur $\overrightarrow{AH(t)}$ est donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M'(t)} = (1, t)$.
 Ainsi le vecteur $(-t, 1)$ dirige la corde $AH(t)$, au voisinage de $t = t_1$ ou $t = t_2$.
 Quand $t \rightarrow t_1$ (par exemple), le vecteur $(-t_1, 1)$ dirige donc la tangente à Γ_A en $A = H(t_1)$.

Cette tangente est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_1)$ (dirigée par $(1, t_1)$) c'est-à-dire la tangente à \mathcal{P} en $M(t_1)$ (et qui passe par A .)

De même, la tangente à Γ_A en $A = H(t_2)$ est dirigée par $(-t_2, 1)$ et elle est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_2)$ (dirigée par $(1, t_2)$) c'est-à-dire la tangente à \mathcal{P} en $M(t_2)$ (et qui passe par A .)

Voici une illustration de la situation : les deux tangentes au point double A sont respectivement orthogonales aux deux tangentes menées de A à la parabole \mathcal{P} .



Remarque : on peut vérifier $\frac{Y(t)-b}{X(t)-a} = -t$ à partir des expressions de $X(t), Y(t)$.

C'est cependant inélégant (et n'utilise pas la propriété géométrique définissant de Γ_A .) [Q]

(b) On sait que $A = H(t) \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + 2a = 0$.

Par hypothèse $A \in \mathcal{P}$, donc $b^2 = 2a$.

$A = H(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + b^2 = 0 \Leftrightarrow (t - b)^2 = 0 \Leftrightarrow t = b$.

$A(a, b)$, s'il est sur \mathcal{P} , est donc le point $H(b)$ de Γ_A .

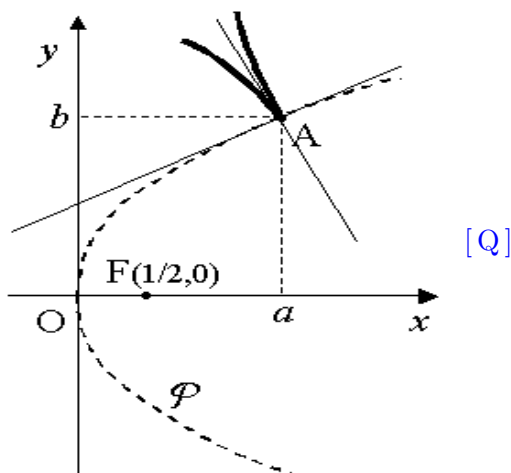
Pour tout $t \neq b$, $\overrightarrow{AH}(t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{M}'(t) = (1, t)$.

$\overrightarrow{AH}(t)$ est donc colinéaire à $(-t, 1)$.

Ainsi $(-b, 1)$ dirige la tangente à Γ_A en $A = H(b)$.

Au point $A = M(b)$ de \mathcal{P} , la tangente est dirigée par $(b, 1)$ et la normale par $(1, -b)$. Ainsi la tangente au point $A = H(b)$ de Γ_A est la normale à \mathcal{P} en $A = M(b)$.

Sur l'illustration, on voit que la courbe Γ_A , du fait qu'elle reste extérieure à \mathcal{P} , présente un rebroussement en A .



4. (a) Le point $H(s)$ appartient à la tangente $\mathcal{D}(s)$ à \mathcal{P} en $M(s)$.

Cette droite passe par $M(s)$ et est dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{T}(s)$.

Il existe donc un réel $\lambda(s)$ tel que $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$.

Mais le vecteur $\overrightarrow{AH}(s)$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$.

Il en découle :

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{AH}(s) | \overrightarrow{T}(s)) = (\overrightarrow{AM}(s) + \overrightarrow{M}(s)H(s) | \overrightarrow{T}(s)) \\ &= (\overrightarrow{AM}(s) | \overrightarrow{T}(s)) + (\lambda(s)\overrightarrow{T}(s) | \overrightarrow{T}(s)) = (\overrightarrow{AM}(s) | \overrightarrow{T}(s)) + \lambda(s) \end{aligned}$$

Pour tout s on a donc : $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$ avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{T}(s))$. [Q]

(b) Avec les notations précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= \left(\frac{d\overrightarrow{M}(s)A}{ds} | \overrightarrow{T}(s) \right) + \left(\overrightarrow{M}(s)A | \frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds} \right) \\ &= (-\overrightarrow{T}(s) | \overrightarrow{T}(s)) + \left(\overrightarrow{M}(s)A | \frac{\overrightarrow{N}(s)}{R(s)} \right) = -1 + \frac{1}{R(s)} (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{N}(s)). \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}'(s) &= \frac{dM}{ds} + \lambda'(s)\overrightarrow{T}(s) + \lambda(s)\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \\ &= \overrightarrow{T}(s) + \left(-1 + \frac{1}{R(s)} (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{N}(s)) \right) \overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{T}(s)) \frac{\overrightarrow{N}}{R(s)} \\ &= \frac{1}{R(s)} \left[(\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{N}(s)) \overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{T}(s)) \overrightarrow{N}(s) \right] \end{aligned}$$

[Q]

(c) Supposons que $H(s)$ soit un point stationnaire de la courbe Γ_A , c'est-à-dire $\overrightarrow{H}'(s) = \vec{0}$.

Le résultat précédent donne alors $(\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{N}(s)) = (\overrightarrow{M}(s)A | \overrightarrow{T}(s)) = 0$.

Comme $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est une base de \mathbb{R}^2 , cela équivaut à $\overrightarrow{M}(s)A = \vec{0}$ c'est-à-dire $M(s) = A$. Cela est évidemment exclu si A n'est pas un point de la parabole \mathcal{P} .

Conclusion : si A n'appartient pas à \mathcal{P} , la courbe Γ_A n'a pas de point stationnaire. [Q]