Podaires d'une parabole

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure canonique de plan euclidien orienté.

On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2x$, et F le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ (le *foyer* de $\mathcal{P}$.)

Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ s'écrit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Première partie

On oriente la parabole $\mathcal{P}$ dans le sens des t croissants (donc dans le sens des ordonnées croissantes.)

On fixe l'origine des abscisses curvilignes en O (donc au sommet de la parabole.)

1. Calculer l'abscisse curviligne s du point $M(t)$.
   Préciser la base de Frenet au point $M(s)$. [S]
2. Calculer le rayon de courbure R au point $M(s)$.
   Soit $\Omega(t)$ le centre de courbure de $\mathcal{P}$ en $M(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $\Omega(t)$ sont données par $\begin{cases} x_\Omega(t) = 1 + \frac{3}{2}\,t^2 \\ y_\Omega(t) = -t^3 \end{cases}$ [S]
3. On note $\mathcal{Q}$ la courbe décrite par $\Omega(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$ (c'est la *développée* de $\mathcal{P}$.)
   Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{Q}$ est : $y^2 = \frac{8}{27}\,(x-1)^3$.
   Vérifier que toute normale à $\mathcal{P}$ est une tangente à $\mathcal{Q}$.
   Représenter conjointement les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. [S]

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on désigne par $A(a, b)$ un point fixé du plan.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 \geq 2x$ est appelé *extérieur* de $\mathcal{P}$.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 > 2x$ est l'*extérieur strict* de $\mathcal{P}$.

On définit aussi l'intérieur $(y^2 \leq 2x)$ et l'intérieur strict $(y^2 < 2x)$ de $\mathcal{P}$.

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M(t)$ de $\mathcal{P}$. [S]
2. Soit $H(t)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $H(t)$ sont données par :
   $$X(t) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} \qquad \text{et} \qquad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2+1)}$$
   Quand t décrit $\mathbb{R}$, le point $H(t)$ décrit une courbe notée Γ_A ou $\Gamma(a, b)$.
   On dit que Γ_A est la *podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à A*. [S]
3. Montrer que la courbe Γ est toute entière incluse dans l'extérieur de $\mathcal{P}$. [S]
4. Montrer que $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ se déduisent l'une de l'autre par une symétrie.
   Que peut-on dire, en particulier, des courbes $\Gamma(a, 0)$? [S]
5. Décrire Γ_A quand $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. On fera une figure illustrant cette situation. [S]

Troisième partie

On garde les notations des parties I et II.

On va procéder à des études locales des podaires de la parabole $\mathcal{P}$. Dans cette partie, plusieurs questions ont des réponses géométriques simples, que l'on préférera bien sûr à des débauches de calculs.

1. Préciser le placement de Γ_A par rapport à sa branche infinie et illustrer les différents cas (on pourra se limiter à $b \geq 0$, avec $A \neq F$.) [S]
2. (a) Montrer que A appartient à Γ_A si et seulement si A est extérieur à $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Montrer que si Γ_A présente un point double B, alors nécessairement $B = A$. [S]
   (c) Inversement montrer que A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. [S]
3. (a) On suppose que $A(a, b)$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. Montrer que les deux tangentes à Γ_A au point A sont respectivement orthogonales aux deux tangentes à $\mathcal{P}$ menées par A. [S]
   (b) Si $A(a, b)$ est sur $\mathcal{P}$, Montrer que la tangente en A à Γ_A est la normale en A à $\mathcal{P}$. [S]
4. Dans cette question, on va utiliser le paramétrage de $\mathcal{P}$ par une abscisse curviligne s, comme on l'a vu dans la partie I. Le point $M(t)$ sera aussi noté $M(s)$ en référence à ce paramétrage.
   On notera $R(s)$ le rayon de courbure à la parabole $\mathcal{P}$ au point $M(s)$.
   On notera aussi $\mathcal{D}(s)$ la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(s)$, et $H(s)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(s)$.
   L'abscisse curviligne s de $\mathcal{P}$ définit donc aussi une représentation paramétrique de la podaire Γ_A (mais attention : ce n'est pas une abscisse curviligne sur Γ_A.)
   (a) Pour tout s, justifier l'égalité $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$, avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))$. [S]
   (b) On désigne par $\overrightarrow{H'(s)}$ le vecteur dérivé, par rapport à s, de la position du point $H(s)$.
   Montrer que $\overrightarrow{H'(s)} = \dfrac{1}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\,\overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\,\overrightarrow{N}(s)\right]$ [S]
   (c) Prouver que si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors la courbe Γ_A est sans point stationnaire. [S]
   (d) Prouver que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors A est le seul point stationnaire de Γ_A. [S]
5. Dans cette question, on suppose que le point $A(a, b)$ est quelconque.
   Pour tout réel m, soit Δ_m la droite passant par A, de coefficient directeur m.
   (a) Montrer que Δ_m est normale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $m^3 + 2(1 - a)m + 2b = 0$.
   Il est donc clair que par A passent au moins une et au plus trois normales distinctes à $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Discuter le nombre n_A de normales à $\mathcal{P}$ qui passent par $A(a, b)$.
   On montrera en particulier que $n_A = 3 \Leftrightarrow a > 1$ et $|b| < (\frac{2}{3}(a-1))^{3/2}$.
   Faire une figure représentant les trois normales issues de $A(15/2, 6)$. [S]
   (c) Soit $M(t_0)$ le pied sur $\mathcal{P}$ de l'une quelconque des normales à $\mathcal{P}$ passant par A, avec $M(t_0) \neq A$.
   Montrer que $M(t_0)$ est un point de Γ_A et préciser la tangente en Γ en ce point.
   Indication : utiliser les notations de la question III.4.
   On pourra rapidement illustrer deux cas de figure avec un point A à partir duquel on peut mener trois normales à $\mathcal{P}$ (A étant successivement intérieur puis extérieur à $\mathcal{P}$.) [S]

Quatrième partie

Cette partie est consacrée à l'étude des points d'inflexion éventuels de la courbe Γ_A.
Pour cela, on reprend les notations de la question III4, et en particulier les résultats de III4a et III4b.

1. En dérivant par rapport à s l'égalité obtenue dans III4b, prouver que :
$R'(s)\overrightarrow{H'(s)} + R(s)\overrightarrow{H''(s)} = \dfrac{2}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\,\overrightarrow{N}(s) - (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\,\overrightarrow{T}(s)\right] - \overrightarrow{N}(s)$ [S]
2. Par un calcul dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$, en déduire :
$R^3(s)\det(\overrightarrow{H'(s)}, \overrightarrow{H''(s)}) = 2\|\overrightarrow{AM(s)}\|^2 + (\overrightarrow{AM(s)} \mid R(s)\overrightarrow{N}(s))$ [S]
3. On définit le polynôme $P_A(t) = bt^3 + \frac{3}{2}(1-2a)t^2 - 3bt + 2a^2 + 2b^2 - a$.
Montrer que $H(t_0)$ est un point d'inflexion de Γ_A si P_A s'annule en changeant de signe en t_0. [S]
4. Dans cette question uniquement, on suppose $b = 0$.
Discuter suivant a le nombre de points d'inflexion sur Γ_A. [S]
5. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.
   (a) Vérifier que la dérivée P'_A de P_A s'annule en deux points distincts t_1 et t_2. [S]
   (b) Effectuer la division euclidienne de P_A par P'_A. [S]
   (c) En déduire qu'on a l'égalité $P_A(t_1)P_A(t_2) = 4\,\|\overrightarrow{AF}\|^4\left(1 - \dfrac{2a}{b^2}\right)$. [S]
   (d) Discuter le nombre d'inflexions de Γ_A suivant la position de A par rapport à $\mathcal{P}$. [S]
6. On se propose de trouver les points d'inflexion par une autre méthode.
Pour cela on va trouver une caractérisation pour que trois points de Γ_A soient alignés.
   (a) On se donne trois points $H(t_1)$, $H(t_2)$, $H(t_3)$ de Γ_A, de paramètres t_1, t_2, t_3 distincts.
   On note $\begin{cases} \sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ \sigma_3 = t_1t_2t_3 \end{cases}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} X(t_1) & X(t_2) & X(t_3) \\ Y(t_1) & Y(t_2) & Y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
   Montrer que $H(t_1), H(t_2), H(t_3)$ sont alignés $\Leftrightarrow 2b(\sigma_1 - \sigma_3) + (2a-1)\sigma_2 = 4a^2 + 4b^2 - 2a$. [S]
   (b) On admet qu'une droite $\mathcal{D}$ du plan est une tangente d'inflexion de la courbe Γ_A si l'équation aux points d'intersection de cette droite avec Γ_A admet une racine triple.
   Avec cette idée, retrouver la condition pour que $H(t)$ soit un point d'inflexion sur Γ_A. [S]

Cinquième partie

Dans cette partie, on étudie et on trace quelques courbes Γ_A. Dans chaque cas, on précisera l'asymptote, et le cas échéant les points doubles, les points stationnaires et les points d'inflexion.

1. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (-5/2, 0)$. [S]
2. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (0, 0)$. [S]
3. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 0)$. [S]
4. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 2)$. [S]
5. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 4)$. [S]
6. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 6)$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. L'abscisse curviligne de $M(t)$ est $s = \displaystyle\int_0^t \|\overrightarrow{OM'(u)}\|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

   On intègre par parties (autre méthode : poser $u = \operatorname{sh}\varphi$.)

   $I = \displaystyle\int_0^t \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \Big[u\sqrt{u^2+1}\Big]_0^t - \int_0^t \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = t\sqrt{t^2+1} - I + \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}$.

   On en déduit $s = \dfrac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \dfrac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})$

   On a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{t^2+1}$, puis $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. [Q]

2. On trouve $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-t}{(t^2+1)^2}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{(t^2+1)^2}\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$.

   On connait l'égalité $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R}$. On en déduit $R(s) = -(t^2+1)^{3/2}$.

   On a $\Omega(t) = M(t) + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} - (t^2+1)\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix}$. [Q]

3. Puisque $x_\Omega = 1 + \frac{3}{2}t^2$ et $y_\Omega = -t^3$, on a : $y_\Omega^2 = t^6 = \left(t^2\right)^3 = \left(\frac{2}{3}(x_\Omega - 1)\right)^3 = \frac{8}{27}(x_\Omega - 1)^3$.

   Réciproquement, soit $B(x,y)$ un point de la courbe d'équation $y^2 = \frac{8}{27}(x-1)^3$.

   Posons $t = -y^{1/3}$, donc $y = -t^3$. On a $\frac{8}{27}(x-1)^3 = y^2 = t^6 = (t^2)^3$ donc $\frac{2}{3}(x-1) = t^2$.

   Ainsi $x = 1 + \frac{3}{2}t^2$ et $B = (1 + \frac{3}{2}t^2, -t^3)$ est le point $\Omega(t)$.

   Conclusion : la courbe $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $y^2 = \frac{8}{27}(x-1)^3$.

   Soit Δ la normale à $\mathcal{P}$ en $M(t)$. Cette droite passe par $\Omega(t)$ et est dirigée par $(-1,t)$.

   D'autre part $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} = (3t, -3t^2) = -3t(-1,t)$.

   Pour $t \neq 0$, la tangente en $\Omega(t)$ à $\mathcal{Q}$ est donc également dirigée par $(-1,t)$.

   Ceci est vrai aussi quand $t = 0$ (car la tangente en $\Omega(0) = (1,0)$ à $\mathcal{Q}$ est horizontale.)

   Conclusion : la normale en $M(t)$ à la parabole $\mathcal{P}$ est la tangente en $\Omega(t)$ à sa développée Q.

   Remarque : le résultat précédent est un cas particulier d'une propriété générale des développées.

   La courbe $\mathcal{Q}$ est la réunion des courbes $y = \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}$ et $y = -\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}$.

   Ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe Ox.

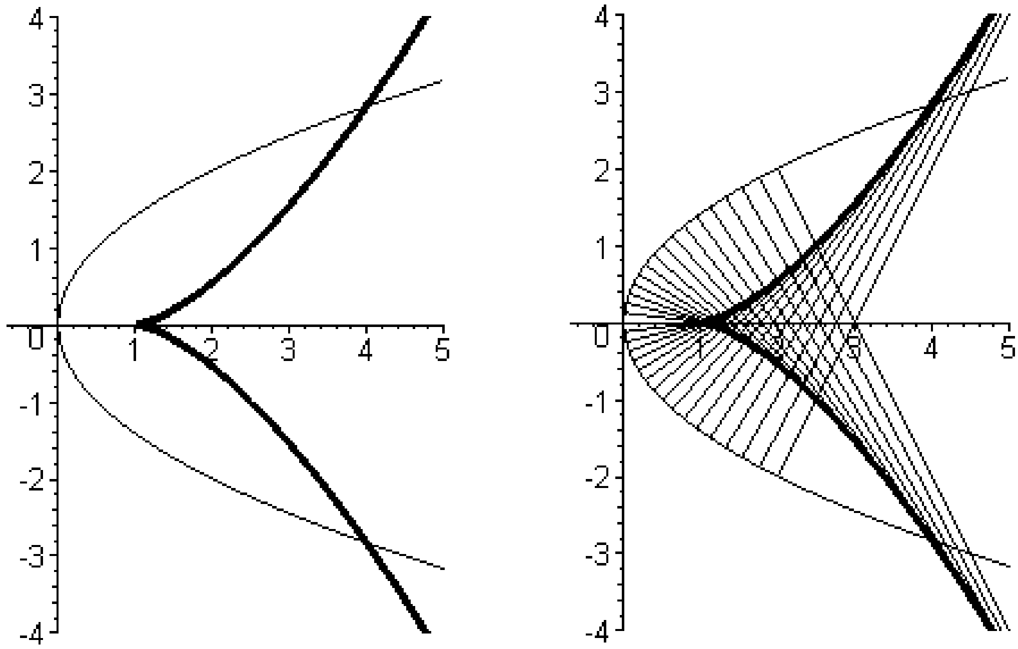
   Leur tracé ne pose pas de problème : il y a une demi-tangente horizontale au point $\Omega(0) = (1,0)$ (il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce pour la courbe $\mathcal{Q}$.)

   On constate que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ se rencontrent en deux points symétriques par rapport à Ox.

   Plus précisément, $\begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)^3 - 27x = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Voici une partie de la représentation graphique de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ (cette dernière en trait gras.)

A droite, on a représenté un certain nombre de normales à $\mathcal{P}$: ce sont toutes des tangentes à $\mathcal{Q}$.



[Q]

Deuxième partie

1. Pour tout réel t, un vecteur directeur de $\mathcal{D}(t)$ est $M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (t, 1)$.

   Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(t)$ est donc :

$$\begin{vmatrix} X & x(t) & x'(t) \\ Y & y(t) & y'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & \frac{1}{2}t^2 & t \\ Y & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow X - tY + \frac{1}{2}t^2 = 0$$

   [Q]

2. Un vecteur orthogonal à $M'(t) = (t, 1)$ est $v(t) = (-1, t)$.

   Il existe un réel λ (dépendant de t) tel que $H(t) = A + \lambda v(t) = (a - \lambda, b + \lambda t)$.

   On exprime que $H(t) = (X(t), Y(t))$ appartient à $\mathcal{D}(t)$:

   $X(t) - tY(t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda) - t(b + \lambda t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{t^2 - 2bt + 2a}{2(t^2 + 1)}$

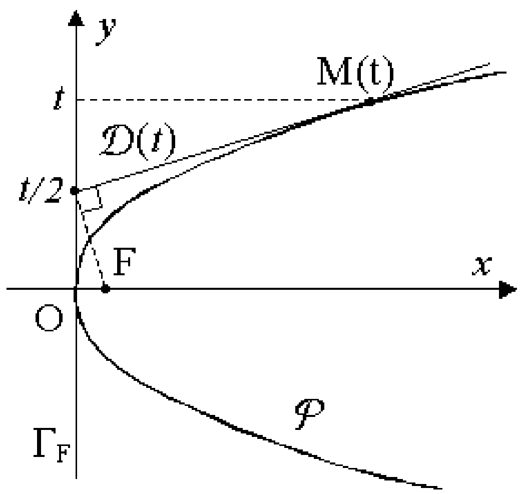
   On trouve $X(t) = a - \lambda = \dfrac{(2a - 1)t^2 + 2bt}{2(t^2 + 1)}$ et $Y(t) = b + \lambda t = \dfrac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2 + 1)}$ [Q]

3. On pourrait montrer l'inégalité $Y^2(t) \geq 2X(t)$ pour tout réel t, mais ce serait maladroit.

   En fait Γ_A est incluse dans l'extérieur de $\mathcal{P}$ parce que les points de Γ_A appartiennent à des tangentes à $\mathcal{P}$, et que celles-ci sont toutes dans l'extérieur de $\mathcal{P}$: c'est une conséquence de la convexité de l'application $y \mapsto \frac{1}{2}y^2$.

   On peut aussi noter que l'équation de $\mathcal{D}(t)$ s'écrit $2X = 2tY - t^2$. Pour tout point (X, Y) de la droite $\mathcal{D}(t)$, on a donc $Y^2 - 2X = Y^2 - 2tY + t^2 = (Y - t)^2 \geq 0$. [Q]

4. Ox est axe de symétrie de $\mathcal{P}$. De même (a, b) et $(a, -b)$ sont symétriques par rapport à Ox.
   Il est donc logique que $\Gamma(a, -b)$ se déduise de $\Gamma(a, b)$ dans la symétrie d'axe Ox.
   Pour le vérifier notons $H(t) = (X(t), Y(t))$ sur $\Gamma(a, b)$ et $\widetilde{H}(t) = (\widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t))$ sur $\Gamma(a, -b)$.
   On constate que $\widetilde{X}(t) = \dfrac{(2a-1)t^2 - 2bt}{2(t^2+1)} = X(-t)$ et $\widetilde{Y}(t) = \dfrac{t^3 + 2at - 2b}{2(t^2+1)} = -Y(-t)$.
   Les points $\widetilde{H}(t)$ et $H(-t)$ sont donc symétriques par rapport à Ox.
   Il en découle que les courbes $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ sont symétriques par rapport à cet axe.
   En particulier Ox est axe de symétrie de chaque courbe $\Gamma(a, 0)$. [Q]
5. On suppose ici $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. Le point A est donc le *foyer* de la parabole.
   Dans ce cas, et pour tout réel t : $X(t) = 0$ et $Y(t) = \dfrac{t}{2}$.
   La courbe Γ_A est donc la droite $x = 0$.
   La podaire d'une parabole $\mathcal{P}$ par rapport à son foyer est donc la tangente au sommet de $\mathcal{P}$.
   La figure illustre la situation : la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M = (\frac{t^2}{2}, t)$ rencontre Oy en $H(t) = (0, \frac{t}{2})$.
   Le point $H(t)$ est aussi la projection orthogonale du foyer F sur la tangente $\mathcal{D}(t)$.

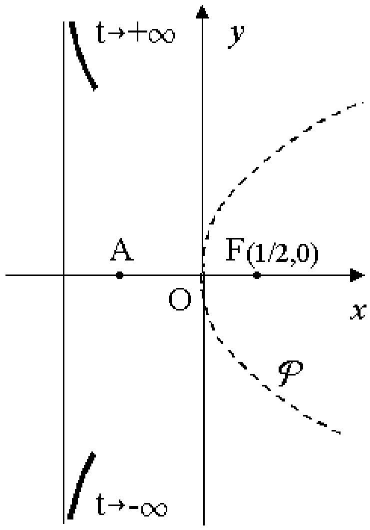


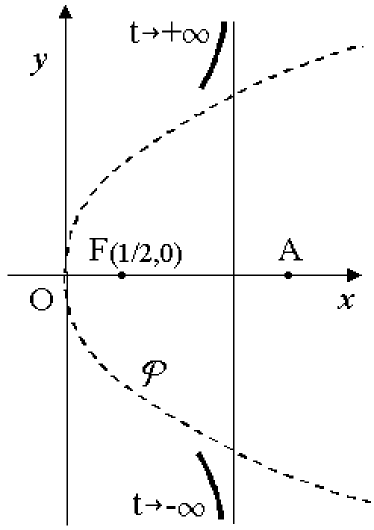
[Q]

Troisième partie

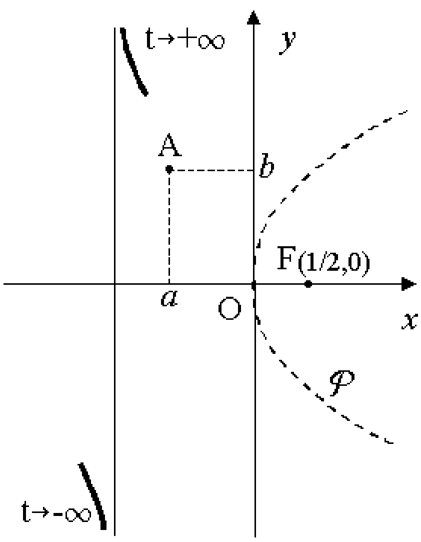
1. Γ_A n'a qu'une branche infinie, quand $t \to \pm\infty$. On a alors $X(t) \sim a - \frac{1}{2}$ et $Y(t) \sim \frac{t}{2}$.
   Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = a - \frac{1}{2}$.
   D'autre part $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{2bt - (2a-1)}{2(t^2+1)}$.
   - Si $b = 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{1-2a}{2(t^2+1)}$, qui a toujours le signe de $1 - 2a$.
     La courbe est donc toujours à droite de son asymptote si $a < \frac{1}{2}$ et toujours à gauche sinon.
   - Si $b > 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) \sim \frac{b}{t}$.
     La courbe est donc à droite de son asymptote quand $t \to +\infty$, et à gauche sinon.

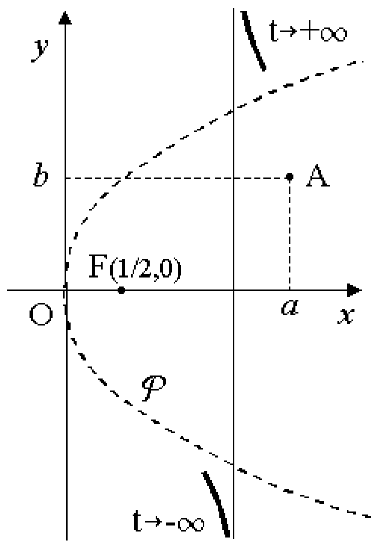
   Voici une illustration du cas $b = 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis $b = 0$ et $a > \frac{1}{2}$.





   Ensuite voici le cas $b > 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis le cas $b > 0$ et $a > \frac{1}{2}$.



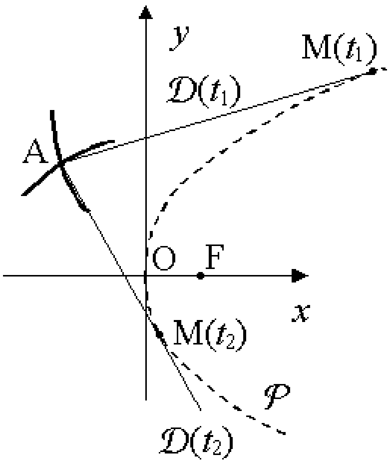


[Q]

2. (a) Dire que A appartient à Γ_A, c'est dire qu'il existe t tel que $A = H(t)$.
Mais on sait que $H(t)$ est toujours la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
Écrire que $A = H(t)$ c'est donc écrire que A appartient à la tangente $\mathcal{D}(t)$.
On sait que l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ à $\mathcal{P}$ en $M(t)$ est $2X - 2tY + t^2 = 0$.
Cette tangente passe par $A(a, b)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
Il s'agit d'une équation dont le discriminant est $\Delta' = b^2 - 2a$.
Cette équation possède au moins une solution réelle t si et seulement si $b^2 \geq 2a$.
Conclusion : A appartient à Γ_A si et seulement si $b^2 \geq 2a$, c'est-à-dire si seulement si A appartient à la parabole $\mathcal{P}$ ($b^2 = 2a$) ou lui est strictement extérieur ($b^2 > 2a$.) [Q]
(b) Soit B un point de Γ_A. On suppose que B est distinct du point A.
On suppose également qu'il existe t_1, t_2 tels que $B = H(t_1) = H(t_2)$.
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à la fois à $\mathcal{D}(t_1)$ et à $\mathcal{D}(t_2)$.
Ces deux droites (passant par B et orthogonales à $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$) sont donc confondues.
Or $\mathcal{D}(t_1)$ est dirigée par $(t_1, 1)$, et $D(t_2)$ par $(t_2, 1)$. Il en découle $t_1 = t_2$.
Conclusion : le seul point double *possible* sur Γ_A est le point A. [Q]
(c) Comme on l'a vu en (a), on a $A = H(t)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
Le point A est un point double $\Leftrightarrow$ cette équation possède deux solutions distinctes.
Cela équivaut à dire que le discriminant $\delta' = b^2 - 2a$ est strictement positif.
Donc A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow b^2 > 2a \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. [Q]

3. (a) Notons t_1 et t_2 les deux réels distincts tels que $A = H(t_1) = H(t_2)$.
On sait que pour $t \notin \{t_1, t_2\}$, on a $H(t) \neq A$ (car par A ne passent que deux tangentes à $\mathcal{P}$.)
On sait que $H(t)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$ (tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t)$.)
Le vecteur $\overrightarrow{AH(t)}$ est donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M'(t)} = (1, t)$.
Ainsi le vecteur $(-t, 1)$ dirige la corde $AH(t)$, au voisinage de $t = t_1$ ou $t = t_2$.
Quand $t \to t_1$ (par exemple), le vecteur $(-t_1, 1)$ dirige donc la tangente à Γ_A en $A = H(t_1)$.

Cette tangente est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_1)$ (dirigée par $(1, t_1)$) c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t_1)$ (et qui passe par A.)
De même, la tangente à Γ_A en $A = H(t_2)$ est dirigée par $(-t_2, 1)$ et elle est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_2)$ (dirigée par $(1, t_2)$) c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t_2)$ (et qui passe par A.)
Voici une illustration de la situtation : les deux tangentes au point double A sont respectivement orthogonales au deux tangentes menées de A à la parabole $\mathcal{P}$.



Remarque : on peut vérifier $\frac{Y(t)-b}{X(t)-a} = -t$ à partir des expressions de $X(t), Y(t)$.
C'est cependent inélégant (et n'utilise pas la propriété géométrique définissant de Γ_A.) [Q]

(b) On sait que $A = H(t) \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + 2a = 0$.

Par hypothèse $A \in P$, donc $b^2 = 2a$.

$A = H(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + b^2 = 0 \Leftrightarrow (t-b)^2 = 0 \Leftrightarrow t = b$.

$A(a,b)$, s'il est sur $\mathcal{P}$, est donc le point $H(b)$ de Γ_A.

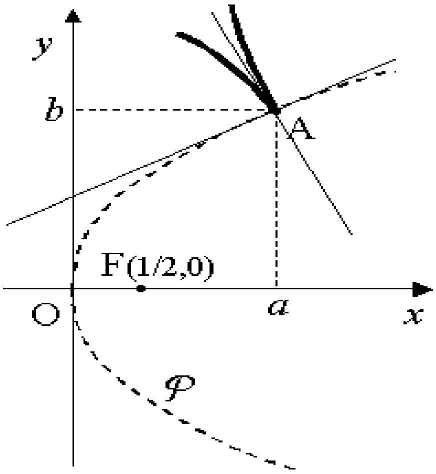
Pour tout $t \neq b$, $\overrightarrow{AH(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M'(t)} = (1,t)$.

$\overrightarrow{AH(t)}$ est donc colinéaire à $(-t, 1)$.

Ainsi $(-b,1)$ dirige la tangente à Γ_A en $A = H(b)$.

Au point $A = M(b)$ de $\mathcal{P}$, la tangente est dirigée par $(b,1)$ et la normale par $(1,-b)$. Ainsi la tangente au point $A = H(b)$ de Γ_A est la normale à $\mathcal{P}$ en $A = M(b)$.

Sur l'illustration, on voit que la courbe Γ_A, du fait qu'elle reste extérieure à $\mathcal{P}$, présente un rebroussement en A.



[Q]

4. (a) Le point $H(s)$ appartient à la tangente $\mathcal{D}(s)$ à $\mathcal{P}$ en $M(s)$.

Cette droite passe par $M(s)$ et est dirigée par le vecteur unitaire $\vec{T}(s)$.

Il existe donc un réel $\lambda(s)$ tel que $H(s) = M(s) + \lambda(s)\vec{T}(s)$.

Mais le vecteur $\overrightarrow{AH(s)}$ est orthogonal à $\vec{T}(s)$.

Il en découle :

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{AH(s)} \mid \vec{T}(s)) = (\overrightarrow{AM(s)} + \overrightarrow{M(s)H(s)} \mid \vec{T}(s)) \\ &= (\overrightarrow{AM(s)} \mid \vec{T}(s)) + (\lambda(s)\vec{T}(s) \mid \vec{T}(s)) = (\overrightarrow{AM(s)} \mid \vec{T}(s)) + \lambda(s) \end{aligned}$$

Pour tout s on a donc : $H(s) = M(s) + \lambda(s)\vec{T}(s)$ avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s))$. [Q]

(b) Avec les notations précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M(s)A}}{\mathrm{d}s} \,\Big|\, \vec{T}(s)\right) + \left(\overrightarrow{M(s)A} \,\Big|\, \frac{\mathrm{d}\vec{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right) \\ &= (-\vec{T}(s) \mid \vec{T}(s)) + \left(\overrightarrow{M(s)A} \,\Big|\, \frac{\vec{N}(s)}{R(s)}\right) = -1 + \frac{1}{R(s)}\,(\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{N}(s)). \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H'(s)} &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} + \lambda'(s)\vec{T}(s) + \lambda(s)\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \\ &= \vec{T}(s) + \left(-1 + \frac{1}{R(s)}\,(\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{N}(s))\right)\vec{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s))\frac{\vec{N}}{R(s)} \\ &= \frac{1}{R(s)}\Big[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{N}(s))\vec{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s))\vec{N}(s)\Big] \end{aligned}$$

[Q]

(c) Supposons que $H(s)$ soit un point stationnaire de la courbe Γ_A, c'est-à-dire $\overrightarrow{H'(s)} = \vec{0}$.

Le résultat précédent donne alors $(\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{N}(s)) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \vec{T}(s)) = 0$.

Comme $(\vec{T}, \vec{N})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, cela équivaut à $\overrightarrow{M(s)A} = \vec{0}$ c'est-à-dire $M(s) = A$.

Cela est évidemment exclu si A n'est pas un point de la parabole $\mathcal{P}$.

Conclusion : si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la courbe Γ_A n'a pas de point stationnaire. [Q]