Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles.

On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure usuelle de plan eulidien.

Pour tout point A et tout réel $r > 0$, on notera $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre A et de rayon r (on ne considérera dans ce problème que des cercles ayant un rayon strictement positif.)

Pour tous points A et B, on notera AB la longueur du segment $[A, B]$.

Première partie : cercles orthogonaux

On dit que deux cercles $\mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ sont *orthogonaux* si $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1. On se donne deux cercles quelconques $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$.

   Montrer que ces deux cercles sont sécants (c'est-à-dire se coupent en deux points disjoints) si et seulement si on a la double inégalité : $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$.

   En déduire que deux cercles orthogonaux sont sécants. [S]

2. Soit A l'un des deux points d'intersection de deux cercles sécants $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   Soit D_1 (resp. D_2) la tangente en A au cercle $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$).
   Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si D_1 et D_2 sont orthogonales. [S]

3. On se donne un cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$, et un point Ω_2.
   Montrer que Ω_2 est le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ orthogonal à $\mathcal{C}_1 \;\Leftrightarrow\; \Omega_2$ est extérieur à $\mathcal{C}_1$.
   Montrer que $\mathcal{C}_2$ est unique. En donner une construction à la règle et au compas. [S]

4. Pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, on note $\Phi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
   $$\forall\, M(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi_v(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$
   On note $\Gamma(v)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\Phi_v(M) = 0$.

   Pour tous $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$, on pose enfin $\varphi(v_1, v_2) = 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2$.

   (a) Discuter, en fonction du vecteur v, la nature de l'ensemble $\Gamma(v)$.
   Vérifier notamment que $\Gamma(v)$ est un cercle si et seulement si $\varphi(v, v) > 0$. [S]

   (b) Soient v_1, v_2 dans $\mathbb{R}^3$, tels que $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ soient des cercles du plan.
   Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\varphi(v_1, v_2) = 0$. [S]

5. (a) Déterminer les cercles orthogonaux simultanément à $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
   On illustrera le résultat par une figure. [S]

   (b) Même question en considérant maintenant les cercles $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 7 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ [S]

   (c) Même question avec $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+3)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$
   Vérifier en outre que les cercles obtenus passent par deux points fixes. [S]

Deuxième partie : axe radical de deux cercles

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle de centre Ω et de rayon r.

Pour tout M de $\mathbb{R}^2$, on dit que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\Omega M)^2 - r^2$ est la *puissance* de M par rapport à $\mathcal{C}$.

Avec cette définition, il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$, resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$) si et seulement si M est extérieur (resp. appartient, resp. est intérieur) au cercle $\mathcal{C}$.

1. (a) Soit M un point du plan, et A, B deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.
   Montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB})$. [S]

   (b) Soit M un point, et D une droite passant par M et rencontrant $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en P et Q.
   Montrer que $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$ (on appréciera deux démonstrations.)
   Qu'obtient-on si la droite D est tangente au cercle $\mathcal{C}$? [S]

   (c) Réciproquement, soit D et Δ deux droites sécantes en un point M.
   On se donne deux points P, Q sur D et deux points R, S sur Δ.
   On suppose qu'on a l'égalité $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MR} \cdot \overline{MS}$.
   Montrer que les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques. [S]

2. Soient $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$ deux cercles non concentriques.

   On appelle *axe radical* de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et on note $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles.

   (a) Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est une droite orthogonale à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$. [S]

   (b) Identifier $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ quand $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents ou sécants. [S]

   (c) Dans le cas où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont disjoints, donner une construction de la droite $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ à la règle et au compas (on pourra utiliser deux cercles auxiliaires).
   On fera deux figures (la première quand $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont extérieurs l'un à l'autre, et la deuxième quand l'un des deux cercles est intérieur à l'autre.) [S]

3. On se donne deux cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$, non concentriques.
   Montrer qu'un point Ω est le centre d'un cercle orthogonal à la fois à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ si et seulement si Ω est extérieur à ces deux cercles et appartient à leur axe radical. [S]

4. (a) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ dont les centres ne sont pas alignés.

   Montrer qu'il existe un unique point M du plan ayant même puissance par rapport aux trois cercles. Ce point est appelé *centre radical* des trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. [S]

   (b) Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

   Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est aussi le centre radical des trois cercles de diamètres respectifs AB, AC, BC. [S]

   (c) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1), \mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2), \mathcal{C}_3(\Omega_3, r_3)$, orthogonaux deux à deux.
   Montrer que l'axe radical de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est l'orthocentre du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$. [S]

Troisième partie : faisceaux de cercles

Pour toute droite $\mathcal{D}$ et tout cercle $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ la réunion de $\mathcal{C}$ et de l'ensemble des cercles $\mathcal{C}'$ tels que $\Delta(\mathcal{C},\mathcal{C}')=\mathcal{D}$; $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est appelé *faisceau de cercles* engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

1. Dans cette question on décrit le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ selon la position de la droite $\mathcal{D}$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$. On accompagnera chacun des résultats obtenus d'une figure.
   (a) On suppose que la droite $\mathcal{D}$ rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts A, B.
   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles passant par A et B.
   On dit alors que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est le faisceau de *points de base* A et B. [S]

   (b) On suppose que la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en un point A.
   Établir que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles tangents à $\mathcal{D}$ en A. [S]

   (c) On suppose maintenant que la droite $\mathcal{D}$ ne rencontre pas le cercle $\mathcal{C}$.
   Soit H la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ du centre Ω de $\mathcal{C}$.
   Par le point H (qui est donc extérieur à $\mathcal{C}$), on mène le cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ orthogonal à $\mathcal{C}$.
   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles orthogonaux à $\widehat{\mathcal{C}}$ et centrés sur (ΩH).
   Si on note J, K les points d'intersection du cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ et de la droite (ΩH), on dit que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est le faisceau de *points-limites* J, K. [S]

2. (a) Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois cercles (deux à deux non concentriques) et $\mathcal{D}$ une droite du plan.
   On suppose que $\Delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\Delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3)=\mathcal{D}$. Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)=\mathcal{D}$. [S]

   (b) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques, et soit $\mathcal{D}$ une droite.
   Montrer que $\mathcal{C}'\in\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}\in\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}') \Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})=\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}')$. [S]

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $f(x,y)=0$, avec $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$.
   Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $\Phi(x,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (cf question I.4.)
   (a) Pour tout point $M(x,y)$, montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)=\Phi(M)$. [S]

   (b) En déduire que l'équation de tout cercle du faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ s'écrit sous la forme $\Phi(x,y)+\lambda f(x,y)=0$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$. [S]

   (c) Montrer que tout point qui n'est pas sur $\mathcal{D}$ est sur un unique cercle de $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$. [S]

4. On se donne un cercle $\mathcal{C}$, une droite $\mathcal{D}$, et on note $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$.
   (a) On suppose qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est orthogonal à deux cercles distincts $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{F}$.
   Montrer qu'alors $\mathcal{C}'$ est orthogonal à tout cercle du faisceau $\mathcal{F}$.
   Indication : on formera l'équation générale d'un cercle de $\mathcal{F}$ et on utilisera I.4. [S]

   (b) Montrer qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est orthogonal à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ si et seulement si il est centré sur $\mathcal{D}$ et orthogonal au cercle $\mathcal{C}$. [S]

5. Montrer que les cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ forment eux-même un faisceau $\mathcal{F}'$. On dit alors que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux faisceaux orthogonaux (ou *conjugués*.)
   Décrire en particulier le faisceau $\mathcal{F}'$ dans chacun des cas étudiés dans la question III.1 [S]

6. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du faisceau de points-limites A, B.
   Montrer qu'il existe $\lambda>0$ (avec $\lambda\neq1$) tel que : $\forall M\in\mathcal{C},\ \dfrac{MA}{MB}=\lambda$.
   Qu'obtient-on d'analogue avec un cercle du faisceau de points de base A, B ? [S]

Corrigé du problème

Première partie : cercles orthogonaux

1. – *Condition pour que deux cercles soient sécants*

   Quitte à effectuer un changement de repère, on peut toujours considérer que $\mathcal{C}_1$ est centré en O et que $\mathcal{C}_2$ est centré en $\Omega_2(\alpha, 0)$, avec $\alpha > 0$ (on exclut le cas $\alpha = 0$ qui correspond à deux cercles concentriques, disjoints si $r_1 \neq r_2$ et confondus si $r_1 = r_2$.)

   On a $\alpha = \Omega_1\Omega_2$. L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 = r_1^2$, et celle de $\mathcal{C}_2$ est $(x-\alpha)^2 + y^2 = r_2^2$.

   $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants $\Leftrightarrow$ (S) $\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$ possède deux solutions distinctes.

   On a $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ -2\alpha x + \alpha^2 + r_1^2 = r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \Big(x = x_0 = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2) \text{ et } \ y^2 = r_1^2 - x_0^2\Big)$.

   Ce système possède deux solutions distinctes si et seulement si $x_0^2 < r_1^2$. Or :

   $$x_0^2 < r_1^2 \quad \Leftrightarrow (\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 < 4\alpha^2 r_1^2 \Leftrightarrow -2\alpha r_1 < \alpha^2 + r_1^2 - r_2^2 < 2\alpha r_1$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + r_1)^2 > r_2^2 \\ (\alpha - r_1)^2 < r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + r_1 > r_2 \\ -r_2 < \alpha - r_1 < r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > r_2 - r_1 \\ r_1 - r_2 < \alpha < r_1 + r_2 \end{cases}$$

   Ce système équivaut à $|r_2 - r_1| < \alpha < r_1 + r_2$, ce qu'il fallait démontrer.

   – *Deux cercles orthogonaux sont sécants*

   On se donne deux cercles orthogonaux $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$.

   On a donc l'égalité $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

   Mais on a toujours l'inégalité $|r_2 - r_1| < \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < r_1 + r_2$ (élever au carré.)

   Il en résulte que $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$: les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants.

   [Q]

2. – Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux, on a $r_1^2 + r_2^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = (\Omega_1\Omega_2)^2$.

   Cette égalité signifie que le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est rectangle en A.

   Dans ces conditions, la tangente à $\mathcal{C}_1$ en A est la droite $(A\Omega_2)$.

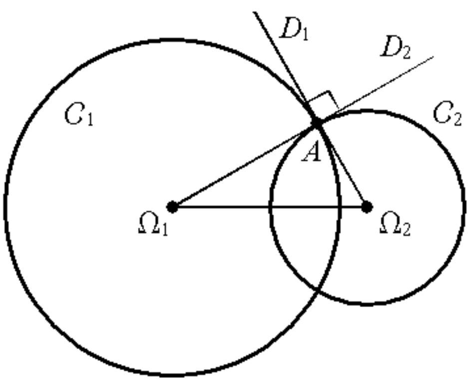
   De même la tangente à $\mathcal{C}_2$ en A est la droite $(A\Omega_1)$.

   Les tangentes en A à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc les droites orthogonales $(A\Omega_1)$ et $(A\Omega_2)$.

   – Inversement, supposons que les tangentes en A aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient orthogonales.

   La droite D_2, orthogonale en A à la tangente en A à $\mathcal{C}_1$, est donc un diamètre de $\mathcal{C}_1$, autrement dit elle passe par Ω_1.

   De même, la droite D_1 est un diamètre de $\mathcal{C}_2$ donc passe par Ω_2. Ainsi les droites $(A\Omega_1)$ et $(A\Omega_2)$, égales à D_2 et D_1, sont orthogonales.

   Le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est donc rectangle en A.

   Ainsi $(\Omega_1\Omega_2)^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

   Les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc orthogonaux.

   [Q]

3. Supposons que Ω_2 soit le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ orthogonal à $\mathcal{C}_1$.

   Alors $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} > r_1$, ce qui prouve que Ω_2 est extérieur à $\mathcal{C}_1$.

   Réciproquement, on suppose que Ω_2 est extérieur à $\mathcal{C}_1$.

   Supposons que $\mathcal{C}_2$ existe, et soit A l'un des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

   D'après la question précédent, le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est rectangle en A.

   Autrement dit A est sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $\Omega_1\Omega_2$.

   Le cercle $\mathcal{C}$ rencontre effectivement $\mathcal{C}_1$ en deux points distincts.

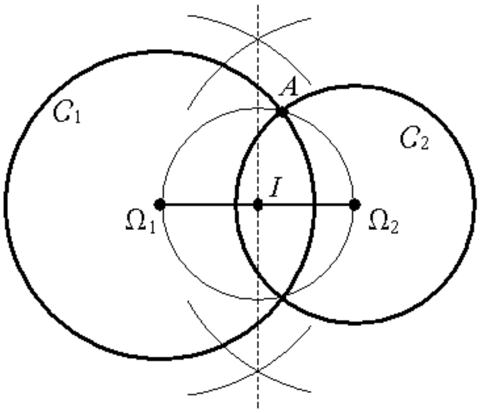
   On nomme A l'un de ces deux points, ce qui détermine $\mathcal{C}_2$ de manière unique (cercle centré en Ω_2 et de rayon $r_2 = \Omega_2 A$.)

   Pour construire $\mathcal{C}_2$ à la règle et au compas, on mène deux cercles sécants centrés respectivement en Ω_1 et Ω_2, et de même rayon.

   La droite joignant leurs points d'intersection est la médiatrice du segment $[\Omega_1, \Omega_2]$. Cette médiatrice fournit le milieu I de ce segment.

   On peut alors tracer le cercle de diamètre $\Omega_1\Omega_2$. Celui-ci rencontre $\mathcal{C}_1$ en deux points.

   Si A est l'un d'eux, alors $\mathcal{C}_2$ est le cercle centré en Ω_2 et de rayon $r_2 = \Omega_2 A$.



   [Q]

4. (a) On a $M(x,y) \in \Gamma(v) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$.

   ◇ Si $a^2 + b^2 - c < 0$, alors $\Gamma(v)$ est l'ensemble vide.

   ◇ Si $a^2 + b^2 - c = 0$, alors l'ensemble $\Gamma(v)$ se réduit au point (a,b).

   ◇ Si $a^2 + b^2 - c > 0$, $\Gamma(v)$ est le cerle de centre (a,b) et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

   Pour tout $v(a,b,c)$, on a $\varphi(v,v) = 2(a^2 + b^2 - c)$.

   Donc $\Gamma(v)$ est un cercle $\Leftrightarrow \varphi(v,v) > 0$. Le rayon $\Gamma(v)$ est alors : $r = \sqrt{\frac{1}{2}\varphi(v,v)}$. [Q]

   (b) Posons $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$. Par hypothèse, on a $\begin{cases} r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1 > 0 \\ r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2 > 0 \end{cases}$

   On obtient alors successivement :

   $$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 &= a_1^2 + b_1^2 - c_1 + a_2^2 + b_2^2 - c_2 - (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 \\ &= 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2 = \varphi(v_1, v_2). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(v_1, v_2) = 0$. [Q]

5. On cherche les cercles solutions $\mathcal{C}(\Omega, r)$ par leur centre (a, b) et leur rayon r.
Avec ces notations, on a $\mathcal{C} = \Gamma(v)$, avec $v = (a, b, c)$ et $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.
   (a) Notons que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ avec $\Omega_1 = (-1, 0)$ et $r_1 = 1$.
   L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 + 2x = 0$, donc $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ avec $v_1 = (-1, 0, 0)$.
   De même, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ avec $\Omega_2 = (2, 0)$ et $r_2 = 2$.
   L'équation de $\mathcal{C}_2$ est $x^2 + y^2 - 4x = 0$, donc $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ avec $v_1 = (2, 0, 0)$.
   $\mathcal{C}$ est orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - c = 0 \\ 4a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
   Les solutions sont les cercles d'équation $x^2 + y^2 - 2by = 0$ c'est-à-dire $x^2 + (y - b)^2 = b^2$.
   Ce sont les cercles centrés sur l'axe Oy et qui passent par l'origine.
   On a représenté (fig 5a) les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux (ils sont tous centrés sur la tangente commune à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.) [Q]
   (b) Notons que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ avec $\Omega_1 = (2, 0)$ et $r_1 = \sqrt{7}$.
   L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$, donc $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ avec $v_1 = (2, 0, -3)$.
   De même, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ avec $\Omega_2 = (-1, 0)$ et $r_2 = 2$.
   L'équation de $\mathcal{C}_2$ est $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, donc $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ avec $v_1 = (-1, 0, -3)$.
   $\mathcal{C}$ est orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - c + 3 = 0 \\ -2a - c + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 3 \end{cases}$
   Les solutions sont les cercles d'équation $x^2 + y^2 - 2by + 3 = 0$ ($\Leftrightarrow x^2 + (y - b)^2 = b^2 - 3$.)
   Ce sont les cercles centrés en $(0, b)$, de rayon $r = \sqrt{b^2 - 3}$ (avec $|b| > \sqrt{3}$.)
   On a représenté (fig 5b) les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux, et qui sont donc centrés à l'extérieur de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, sur la droite qui joint leurs deux points d'intersection (eux-mêmes situés en $(0, \pm\sqrt{3})$.)

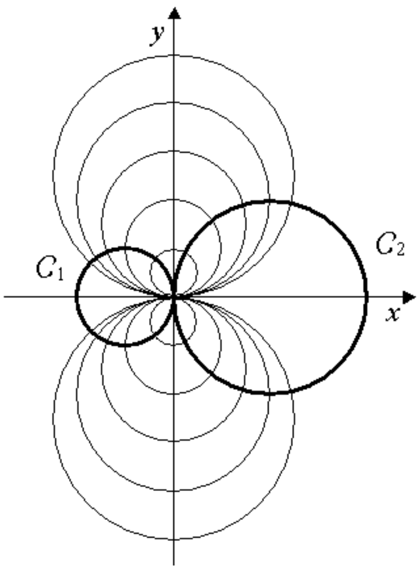


figure 5a

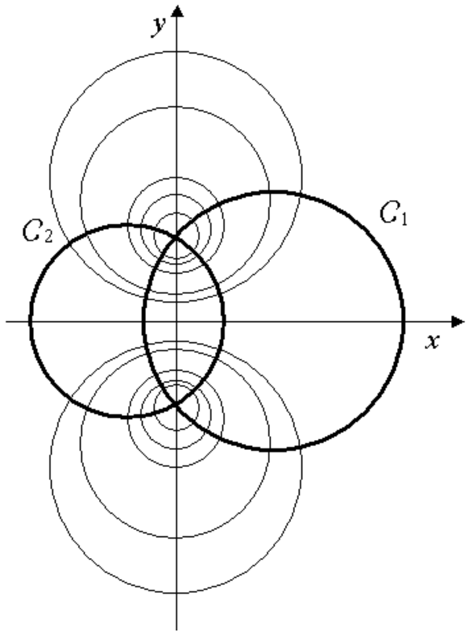


figure 5b

[Q]