

## Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles.

On se place dans  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa structure usuelle de plan euclidien.

Pour tout point  $A$  et tout réel  $r > 0$ , on notera  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$  (on ne considérera dans ce problème que des cercles ayant un rayon strictement positif.)

Pour tous points  $A$  et  $B$ , on notera  $AB$  la longueur du segment  $[A, B]$ .

### Première partie : cercles orthogonaux

On dit que deux cercles  $\mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$  sont *orthogonaux* si  $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ .

1. On se donne deux cercles quelconques  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ .

Montrer que ces deux cercles sont sécants (c'est-à-dire se coupent en deux points disjoints) si et seulement si on a la double inégalité :  $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$ .

En déduire que deux cercles orthogonaux sont sécants. [S]

2. Soit  $A$  l'un des deux points d'intersection de deux cercles sécants  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

Soit  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) la tangente en  $A$  au cercle  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ).

Montrer que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $D_1$  et  $D_2$  sont orthogonales. [S]

3. On se donne un cercle  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ , et un point  $\Omega_2$ .

Montrer que  $\Omega_2$  est le centre d'un cercle  $\mathcal{C}_2$  orthogonal à  $\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \Omega_2$  est extérieur à  $\mathcal{C}_1$ .

Montrer que  $\mathcal{C}_2$  est unique. En donner une construction à la règle et au compas. [S]

4. Pour tout vecteur  $v = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\Phi_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall M(x, y) \in \mathbb{R}^2, \Phi_v(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

On note  $\Gamma(v)$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\Phi_v(M) = 0$ .

Pour tous  $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$ , on pose enfin  $\varphi(v_1, v_2) = 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2$ .

- (a) Discuter, en fonction du vecteur  $v$ , la nature de l'ensemble  $\Gamma(v)$ .

Vérifier notamment que  $\Gamma(v)$  est un cercle si et seulement si  $\varphi(v, v) > 0$ . [S]

- (b) Soient  $v_1, v_2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , tels que  $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$  et  $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$  soient des cercles du plan.

Montrer que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $\varphi(v_1, v_2) = 0$ . [S]

5. (a) Déterminer les cercles orthogonaux simultanément à  $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$   
On illustrera le résultat par une figure. [S]

- (b) Même question en considérant maintenant les cercles  $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 7 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$  [S]

- (c) Même question avec  $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+3)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

Vérifier en outre que les cercles obtenus passent par deux points fixes. [S]

## Deuxième partie : axe radical de deux cercles

Soit  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ .

Pour tout  $M$  de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\Omega M)^2 - r^2$  est la *puissance* de  $M$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .

Avec cette définition, il est clair que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$  (resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$ ) si et seulement si  $M$  est extérieur (resp. appartient, resp. est intérieur) au cercle  $\mathcal{C}$ .

1. (a) Soit  $M$  un point du plan, et  $A, B$  deux points diamétralement opposés sur  $\mathcal{C}$ .  
Montrer que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\overline{MA} \mid \overline{MB})$ . [S]
- (b) Soit  $M$  un point, et  $D$  une droite passant par  $M$  et rencontrant  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  en  $P$  et  $Q$ .  
Montrer que  $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$  (on appréciera deux démonstrations.)  
Qu'obtient-on si la droite  $D$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$ ? [S]
- (c) Réciproquement, soit  $D$  et  $\Delta$  deux droites sécantes en un point  $M$ .  
On se donne deux points  $P, Q$  sur  $D$  et deux points  $R, S$  sur  $\Delta$ .  
On suppose qu'on a l'égalité  $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MR} \cdot \overline{MS}$ .  
Montrer que les quatre points  $P, Q, R, S$  sont cocycliques. [S]
2. Soient  $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$  deux cercles non concentriques.  
On appelle *axe radical* de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  et on note  $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles.
  - (a) Montrer que  $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  est une droite orthogonale à la droite  $(\Omega_1\Omega_2)$ . [S]
  - (b) Identifier  $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  quand  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont tangents ou sécants. [S]
  - (c) Dans le cas où  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont disjoints, donner une construction de la droite  $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  à la règle et au compas (on pourra utiliser deux cercles auxiliaires).  
On fera deux figures (la première quand  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont extérieurs l'un à l'autre, et la deuxième quand l'un des deux cercles est intérieur à l'autre.) [S]
3. On se donne deux cercles  $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$ , non concentriques.  
Montrer qu'un point  $\Omega$  est le centre d'un cercle orthogonal à la fois à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  si et seulement si  $\Omega$  est extérieur à ces deux cercles et appartient à leur axe radical. [S]
4. (a) On se donne trois cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  dont les centres ne sont pas alignés.  
Montrer qu'il existe un unique point  $M$  du plan ayant même puissance par rapport aux trois cercles. Ce point est appelé *centre radical* des trois cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ . [S]
- (b) Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan.  
Montrer que l'orthocentre du triangle  $ABC$  est aussi le centre radical des trois cercles de diamètres respectifs  $AB, AC, BC$ . [S]
- (c) On se donne trois cercles  $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1), \mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2), \mathcal{C}_3(\Omega_3, r_3)$ , orthogonaux deux à deux.  
Montrer que l'axe radical de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  est l'orthocentre du triangle  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ . [S]

### Troisième partie : faisceaux de cercles

Pour toute droite  $\mathcal{D}$  et tout cercle  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  la réunion de  $\mathcal{C}$  et de l'ensemble des cercles  $\mathcal{C}'$  tels que  $\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \mathcal{D}$ ;  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est appelé *faisceau de cercles* engendré par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

1. Dans cette question on décrit le faisceau  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  selon la position de la droite  $\mathcal{D}$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$ . On accompagnera chacun des résultats obtenus d'une figure.
  - (a) On suppose que la droite  $\mathcal{D}$  rencontre le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points distincts  $A, B$ .  
Montrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est l'ensemble des cercles passant par  $A$  et  $B$ .  
On dit alors que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est le faisceau de *points de base*  $A$  et  $B$ . [S]
  - (b) On suppose que la droite  $\mathcal{D}$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en un point  $A$ .  
Établir que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est l'ensemble des cercles tangents à  $\mathcal{D}$  en  $A$ . [S]
  - (c) On suppose maintenant que la droite  $\mathcal{D}$  ne rencontre pas le cercle  $\mathcal{C}$ .  
Soit  $H$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  du centre  $\Omega$  de  $\mathcal{C}$ .  
Par le point  $H$  (qui est donc extérieur à  $\mathcal{C}$ ), on mène le cercle  $\widehat{\mathcal{C}}$  orthogonal à  $\mathcal{C}$ .  
Montrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est l'ensemble des cercles orthogonaux à  $\widehat{\mathcal{C}}$  et centrés sur  $(\Omega H)$ .  
Si on note  $J, K$  les points d'intersection du cercle  $\widehat{\mathcal{C}}$  et de la droite  $(\Omega H)$ , on dit que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  est le faisceau de *points-limites*  $J, K$ . [S]
2. (a) Soit  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  trois cercles (deux à deux non concentriques) et  $\mathcal{D}$  une droite du plan.  
On suppose que  $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3) = \mathcal{D}$ . Montrer que  $\Delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \mathcal{D}$ . [S]
- (b) Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux cercles non concentriques, et soit  $\mathcal{D}$  une droite.  
Montrer que  $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}') \Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}')$ . [S]
3. Soit  $\mathcal{D}$  une droite d'équation  $f(x, y) = 0$ , avec  $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ .  
Soit  $\mathcal{C}$  un cercle d'équation  $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  (cf question I.4.)
  - (a) Pour tout point  $M(x, y)$ , montrer que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \Phi(M)$ . [S]
  - (b) En déduire que l'équation de tout cercle du faisceau  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  s'écrit sous la forme  $\Phi(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . [S]
  - (c) Montrer que tout point qui n'est pas sur  $\mathcal{D}$  est sur un unique cercle de  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ . [S]
4. On se donne un cercle  $\mathcal{C}$ , une droite  $\mathcal{D}$ , et on note  $\mathcal{F}$  le faisceau  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ .
  - (a) On suppose qu'un cercle  $\mathcal{C}'$  est orthogonal à deux cercles distincts  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de  $\mathcal{F}$ .  
Montrer qu'alors  $\mathcal{C}'$  est orthogonal à tout cercle du faisceau  $\mathcal{F}$ .  
Indication : on formera l'équation générale d'un cercle de  $\mathcal{F}$  et on utilisera I.4. [S]
  - (b) Montrer qu'un cercle  $\mathcal{C}'$  est orthogonal à tous les cercles du faisceau  $\mathcal{F}$  si et seulement si il est centré sur  $\mathcal{D}$  et orthogonal au cercle  $\mathcal{C}$ . [S]
5. Montrer que les cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau  $\mathcal{F}$  forment eux-même un faisceau  $\mathcal{F}'$ . On dit alors que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux faisceaux orthogonaux (ou *conjugués*).  
Décrire en particulier le faisceau  $\mathcal{F}'$  dans chacun des cas étudiés dans la question III.1 [S]
6. Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du faisceau de points-limites  $A, B$ .  
Montrer qu'il existe  $\lambda > 0$  (avec  $\lambda \neq 1$ ) tel que :  $\forall M \in \mathcal{C}, \frac{MA}{MB} = \lambda$ .  
Qu'obtient-on d'analogie avec un cercle du faisceau de points de base  $A, B$ ? [S]

## Corrigé du problème

### Première partie : cercles orthogonaux

#### 1. – Condition pour que deux cercles soient sécants

Quitte à effectuer un changement de repère, on peut toujours considérer que  $\mathcal{C}_1$  est centré en  $O$  et que  $\mathcal{C}_2$  est centré en  $\Omega_2(\alpha, 0)$ , avec  $\alpha > 0$  (on exclut le cas  $\alpha = 0$  qui correspond à deux cercles concentriques, disjoints si  $r_1 \neq r_2$  et confondus si  $r_1 = r_2$ .)

On a  $\alpha = \Omega_1\Omega_2$ . L'équation de  $\mathcal{C}_1$  est  $x^2 + y^2 = r_1^2$ , et celle de  $\mathcal{C}_2$  est  $(x - \alpha)^2 + y^2 = r_2^2$ .

$\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont sécants  $\Leftrightarrow (S) \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - \alpha)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$  possède deux solutions distinctes.

On a  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ -2\alpha x + \alpha^2 + r_1^2 = r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left( x = x_0 = \frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2) \text{ et } y^2 = r_1^2 - x_0^2 \right)$ .

Ce système possède deux solutions distinctes si et seulement si  $x_0^2 < r_1^2$ . Or :

$$\begin{aligned} x_0^2 < r_1^2 &\Leftrightarrow (\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 < 4\alpha^2 r_1^2 \Leftrightarrow -2\alpha r_1 < \alpha^2 + r_1^2 - r_2^2 < 2\alpha r_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + r_1)^2 > r_2^2 \\ (\alpha - r_1)^2 < r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + r_1 > r_2 \\ -r_2 < \alpha - r_1 < r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > r_2 - r_1 \\ r_1 - r_2 < \alpha < r_1 + r_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système équivaut à  $|r_2 - r_1| < \alpha < r_1 + r_2$ , ce qu'il fallait démontrer.

#### – Deux cercles orthogonaux sont sécants

On se donne deux cercles orthogonaux  $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$ .

On a donc l'égalité  $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ .

Mais on a toujours l'inégalité  $|r_2 - r_1| < \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < r_1 + r_2$  (élever au carré.)

Il en résulte que  $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$  : les deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont sécants.

[Q]

#### 2. – Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux, on a $r_1^2 + r_2^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = (\Omega_1\Omega_2)^2$ .

Cette égalité signifie que le triangle  $\Omega_1 A \Omega_2$  est rectangle en  $A$ .

Dans ces conditions, la tangente à  $\mathcal{C}_1$  en  $A$  est la droite  $(A\Omega_2)$ .

De même la tangente à  $\mathcal{C}_2$  en  $A$  est la droite  $(A\Omega_1)$ .

Les tangentes en  $A$  à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont donc les droites orthogonales  $(A\Omega_1)$  et  $(A\Omega_2)$ .

#### – Inversement, supposons que les tangentes en $A$ aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient orthogonales.

La droite  $D_2$ , orthogonale en  $A$  à la tangente en  $A$  à  $\mathcal{C}_1$ , est donc un diamètre de  $\mathcal{C}_1$ , autrement dit elle passe par  $\Omega_1$ .

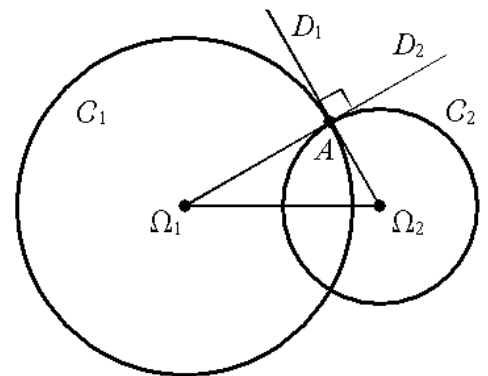
De même, la droite  $D_1$  est un diamètre de  $\mathcal{C}_2$  donc passe par  $\Omega_2$ . Ainsi les droites  $(A\Omega_1)$  et  $(A\Omega_2)$ , égales à  $D_2$  et  $D_1$ , sont orthogonales.

Le triangle  $\Omega_1 A \Omega_2$  est donc rectangle en  $A$ .

Ainsi  $(\Omega_1\Omega_2)^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

Les deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont donc orthogonaux.

[Q]



3. Supposons que  $\Omega_2$  soit le centre d'un cercle  $\mathcal{C}_2$  orthogonal à  $\mathcal{C}_1$ .

Alors  $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} > r_1$ , ce qui prouve que  $\Omega_2$  est extérieur à  $\mathcal{C}_1$ .

Réciproquement, on suppose que  $\Omega_2$  est extérieur à  $\mathcal{C}_1$ .

Supposons que  $\mathcal{C}_2$  existe, et soit  $A$  l'un des deux points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{C}_2$ .

D'après la question précédente, le triangle  $\Omega_1A\Omega_2$  est rectangle en  $A$ .

Autrement dit  $A$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $\Omega_1\Omega_2$ .

Le cercle  $\mathcal{C}$  rencontre effectivement  $\mathcal{C}_1$  en deux points distincts.

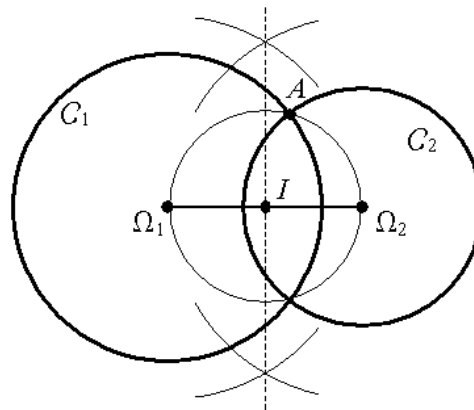
On nomme  $A$  l'un de ces deux points, ce qui détermine  $\mathcal{C}_2$  de manière unique (cercle centré en  $\Omega_2$  et de rayon  $r_2 = \Omega_2A$ .)

Pour construire  $\mathcal{C}_2$  à la règle et au compas, on mène deux cercles sécants centrés respectivement en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et de même rayon.

La droite joignant leurs points d'intersection est la médiatrice du segment  $[\Omega_1, \Omega_2]$ . Cette médiatrice fournit le milieu  $I$  de ce segment.

On peut alors tracer le cercle de diamètre  $\Omega_1\Omega_2$ . Celui-ci rencontre  $\mathcal{C}_1$  en deux points.

Si  $A$  est l'un d'eux, alors  $\mathcal{C}_2$  est le cercle centré en  $\Omega_2$  et de rayon  $r_2 = \Omega_2A$ .



[Q]

4. (a) On a  $M(x, y) \in \Gamma(v) \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$ .

◇ Si  $a^2 + b^2 - c < 0$ , alors  $\Gamma(v)$  est l'ensemble vide.

◇ Si  $a^2 + b^2 - c = 0$ , alors l'ensemble  $\Gamma(v)$  se réduit au point  $(a, b)$ .

◇ Si  $a^2 + b^2 - c > 0$ ,  $\Gamma(v)$  est le cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

Pour tout  $v(a, b, c)$ , on a  $\varphi(v, v) = 2(a^2 + b^2 - c)$ .

Donc  $\Gamma(v)$  est un cercle  $\Leftrightarrow \varphi(v, v) > 0$ . Le rayon  $\Gamma(v)$  est alors :  $r = \sqrt{\frac{1}{2}\varphi(v, v)}$ . [Q]

(b) Posons  $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$ . Par hypothèse, on a  $\begin{cases} r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1 > 0 \\ r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2 > 0 \end{cases}$

On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 &= a_1^2 + b_1^2 - c_1 + a_2^2 + b_2^2 - c_2 - (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 \\ &= 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2 = \varphi(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(v_1, v_2) = 0$ . [Q]

5. On cherche les cercles solutions  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  par leur centre  $(a, b)$  et leur rayon  $r$ .  
Avec ces notations, on a  $\mathcal{C} = \Gamma(v)$ , avec  $v = (a, b, c)$  et  $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$ .

(a) Notons que  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$  avec  $\Omega_1 = (-1, 0)$  et  $r_1 = 1$ .

L'équation de  $\mathcal{C}_1$  est  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ , donc  $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$  avec  $v_1 = (-1, 0, 0)$ .

De même,  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$  avec  $\Omega_2 = (2, 0)$  et  $r_2 = 2$ .

L'équation de  $\mathcal{C}_2$  est  $x^2 + y^2 - 4x = 0$ , donc  $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$  avec  $v_2 = (2, 0, 0)$ .

$$\mathcal{C} \text{ est orthogonal à } \mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - c = 0 \\ 4a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont les cercles d'équation  $x^2 + y^2 - 2by = 0$  c'est-à-dire  $x^2 + (y - b)^2 = b^2$ .

Ce sont les cercles centrés sur l'axe  $Oy$  et qui passent par l'origine.

On a représenté (fig 5a) les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux (ils sont tous centrés sur la tangente commune à  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ .) [Q]

(b) Notons que  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$  avec  $\Omega_1 = (2, 0)$  et  $r_1 = \sqrt{7}$ .

L'équation de  $\mathcal{C}_1$  est  $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ , donc  $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$  avec  $v_1 = (2, 0, -3)$ .

De même,  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$  avec  $\Omega_2 = (-1, 0)$  et  $r_2 = 2$ .

L'équation de  $\mathcal{C}_2$  est  $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ , donc  $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$  avec  $v_2 = (-1, 0, -3)$ .

$$\mathcal{C} \text{ est orthogonal à } \mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - c + 3 = 0 \\ -2a - c + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

Les solutions sont les cercles d'équation  $x^2 + y^2 - 2by + 3 = 0$  ( $\Leftrightarrow x^2 + (y - b)^2 = b^2 - 3$ .)

Ce sont les cercles centrés en  $(0, b)$ , de rayon  $r = \sqrt{b^2 - 3}$  (avec  $|b| > \sqrt{3}$ .)

On a représenté (fig 5b) les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux, et qui sont donc centrés à l'extérieur de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , sur la droite qui joint leurs deux points d'intersection (eux-mêmes situés en  $(0, \pm\sqrt{3})$ .)

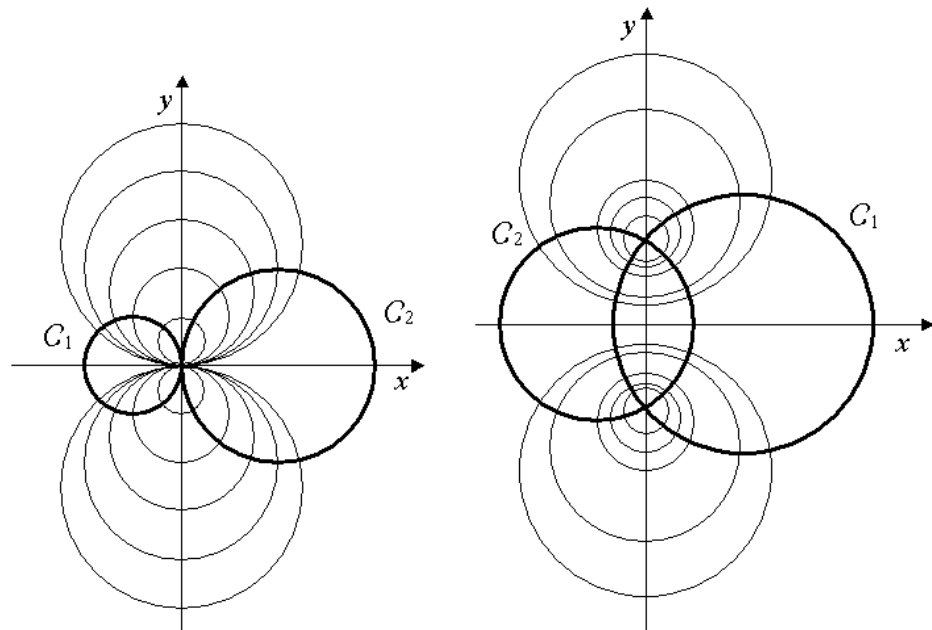


figure 5a

figure 5b

[Q]