

Étude d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.

Ingénieur(e) chez un fabricant de glaces, vous êtes chargé(e) de concevoir un nouveau produit.

Dans tout le problème \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne canonique.

Vous allez effectuer une étude mathématique d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.

Il est recommandé d'accompagner les raisonnements d'une figure.

1. Soit R un réel strictement positif, et a un réel de l'intervalle $[-R, R]$.

Soit \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et $z \geq a$.

Déterminer le volume V du domaine \mathcal{D} en fonction de R et de $\lambda = \frac{a}{R}$. [S]

2. Dans toute la suite, α est un angle strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On considère un *cornet de glace* \mathcal{C} , représenté par un cône de révolution d'axe Oz , de sommet O , de demi-angle au sommet α , limité par les plans $z = 0$ et $z = h > 0$.

Calculer le volume V' du cornet. [S]

3. On forme une glace en posant une boule de vanille, de rayon R , sur le cornet.

Il est clair que suivant les valeurs de R , la boule repose sur le bord circulaire du cornet, ou s'appuie tangentiellement à l'intérieur de celui-ci.

On sera donc amené à discuter suivant les valeurs de la variable R , en fonction de h et α .

(a) Préciser les coordonnées du centre Ω de la boule de vanille. [S]

(b) Donner le pourcentage p_e de glace se trouvant à l'extérieur du cornet. [S]

(c) Pour quel R y a-t-il autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur du cornet? [S]

(d) S'il fait vraiment chaud, la boule de glace peut fondre complètement.

Pour quelles valeurs de R la glace fondue tient-elle entièrement dans le cornet? [S]

4. Dans cette question, on suppose que la boule de glace repose sur le bord circulaire du cornet, et que les génératrices du cornet (les droites issues du sommet) sont tangentes à la boule de glace tout le long du cercle de contact.

(a) Avec ces nouvelles hypothèses, rappeler les résultats des questions (3a) et (3b). [S]

(b) Pour quelles valeurs de α le cornet contient-il toute la glace fondue?

On donnera la réponse sous la forme $\alpha \geq \alpha_0$, avec une valeur approchée de α_0 . [S]

(c) Pour vous démarquer de la concurrence, vous décidez d'offrir en supplément une petite boule de glace à la fraise de rayon r , placée dans le cornet de la façon suivante :

– Elle est située entièrement à l'intérieur du cornet, et tangente à celui-ci.

– Elle est tangente à la boule de glace à la vanille.

Calculer r en fonction de h et de α .

Indiquer le rapport de volume de la glace à la fraise sur la glace à la vanille. [S]

5. Pour satisfaire une clientèle très exigeante, vous avez une idée supplémentaire.

A partir de la configuration vue en (4c) on ajoute un ou plusieurs *smarties* à l'intérieur du cornet, tous tangents à la fois au cornet et aux deux boules de glace.

Chaque smartie est assimilé à une boule de rayon $\rho > 0$.

(a) Calculer le rayon d'un smartie, ainsi que la distance de son centre à l'axe Oz . [S]

(b) En fonction de α , combien de smarties peut-on ainsi ajouter entre les deux boules?

Vérifier que ce nombre est toujours compris entre 6 et 9. [S]

Corrigé du problème

1. Calcul du volume V .

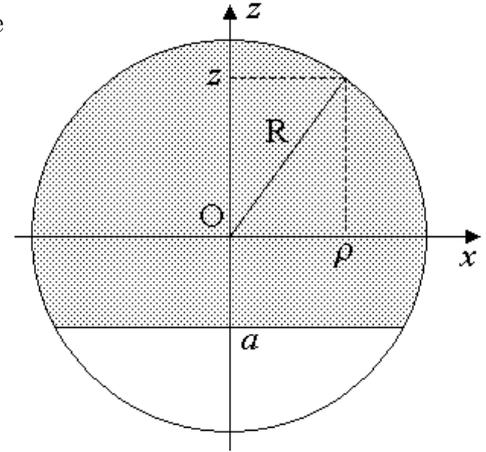
On a représenté ici la *trace* du domaine \mathcal{D} (qui est de révolution d'axe Oz) dans le plan Oxz .

Le domaine \mathcal{D} est représenté en cylindriques par :

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [a, R], \quad \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$$

Le volume V est donc égal à :

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=a}^R \int_{\rho=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \pi \int_a^R (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \frac{\pi}{3} \left[3R^2 z - z^3 \right]_a^R = \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2 a + a^3) \\ &= \frac{\pi}{3} (R-a)^2 (2R+a) = \frac{\pi R^3}{3} (1-\lambda)^2 (2+\lambda) \end{aligned}$$



On vérifie que si $a = R$ ($\lambda = 1$) on a $V = 0$.

De même, si $a = -R$ ($\lambda = -1$) on a $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (volume d'une boule de rayon R .) [Q]

2. Volume V' du cornet.

Voici la trace de l'intérieur \mathcal{C} du cornet dans le plan Oxz .

Le domaine \mathcal{C} est représenté en cylindriques par :

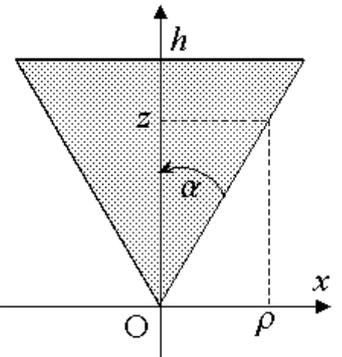
$$\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h], \quad \rho \in [0, z \tan \alpha]$$

Le volume V' est donc égal à :

$$V' = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{\rho=0}^{z \tan \alpha} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \pi \int_0^h z^2 \tan^2 \alpha \, dz = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \alpha.$$

On aurait pu aussi utiliser la formule $V = \frac{hB}{3}$, où B est l'aire de la base du cornet, c'est-à-dire πr^2 avec $r = h \tan \alpha$.

[Q]



3. (a) Coordonnées du centre de la boule de glace

Voici la coupe de la glace dans le plan Oxz .

On se reportera à la figure pour la définition de H, J, K .

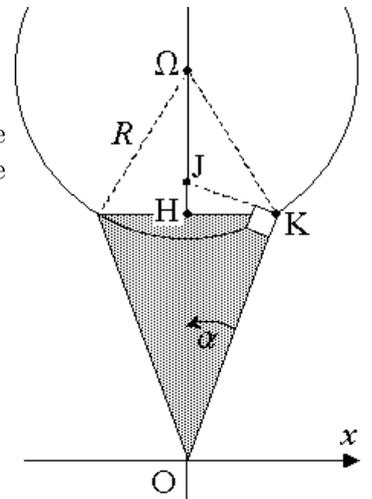
Il est clair que la boule repose sur le bord circulaire du cône si le point Ω est situé sur ou au-dessus de J , c'est-à-dire si le rayon R est supérieur ou égal à la longueur JK .

$$\text{Or } JK = \frac{KH}{\cos \alpha} \text{ et } KH = h \tan \alpha, \text{ donc } JK = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Donc si $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ la boule repose sur le bord du cône.

Dans ce cas, on trouve les coordonnées $(0, 0, z_\Omega)$ de Ω :

$$z_\Omega = OH + H\Omega = h + \sqrt{R^2 - HK^2} = h + \sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}.$$



On illustre maintenant le cas où la boule de glace repose tangentielle-
mentiellement à l'intérieur du cornet.

Comme on vient de le voir, cela correspond à $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Dans ce cas, on a bien sûr $z_{\Omega} = \frac{\Omega K}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$.

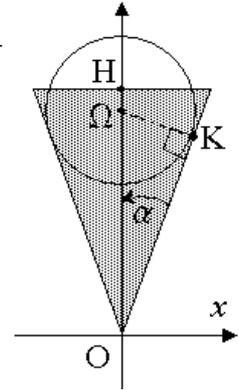
Finalement :

◇ Si $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ alors $z_{\Omega} = \frac{R}{\sin \alpha}$.

◇ Si $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ alors $z_{\Omega} = h + \sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}$.

Remarque : Si $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ les deux expressions donnent $z_{\Omega} = \frac{h}{\cos^2 \alpha}$.

Dans ce cas particulier la glace repose sur le bord circulaire du cornet, et les génératrices
du cônes sont partout tangentes à la boule de glace. [Q]



(b) *Pourcentage de glace à l'extérieur du cornet.*

– Supposons que la glace repose sur le bord circulaire du cornet, donc $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Dans ce cas, le volume de glace extérieur V_e s'obtient avec la question 1.

Avec les notations de celle-ci : $a = h - z_{\Omega} = -\sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}$.

On peut alors écrire $\lambda = \frac{a}{R} = -\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \tan^2 \alpha}$ et $V_e = \frac{\pi R^3}{3} (1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$.

Le volume total de la glace est égal à $V_t = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Le pourcentage de glace à l'extérieur est donc : $p_e = 100 \frac{V_e}{V_t} = 25(1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$.

Remarquons que lorsque $R \rightarrow +\infty$, alors $\lambda \rightarrow -1$ et $p_e \rightarrow 100$ (c'est logique.)

– Supposons que la glace s'appuie tangentielle-mentiellement à l'intérieur du cornet.

Sous cette hypothèse, il y a encore un cas à distinguer.

Il est en effet possible que le rayon R soit petit au point que toute la glace soit intérieure
au cornet : cela se produit quand $z_{\Omega} + R \leq h$.

On a les équivalences : $z_{\Omega} + R \leq h \Leftrightarrow \frac{R}{\sin \alpha} + R \leq h \Leftrightarrow R \leq \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h$.

On peut donc dire que si $R \leq \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h$ alors $p_e = 0$.

On suppose maintenant que R vérifie $\frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Dans ce cas, le volume extérieur est situé entre la cote $z = h$ et la cote $z = z_{\Omega} + R$.

Cela revient à reprendre la question (1) avec $a = h - z_{\Omega} = h - \frac{R}{\sin \alpha}$.

On peut alors poser $\lambda = \frac{a}{R} = \frac{h}{R} - \frac{1}{\sin \alpha}$.

Comme précédemment, on trouve : $p_e = 100 \frac{V_e}{V_t} = 25(1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$.

[Q]

(c) Il y a autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur si $z_{\Omega} = h$.

Cela ne peut se produire que lorsque $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ avec $z_{\Omega} = \frac{R}{\sin \alpha}$, donc $R = h \sin \alpha$.

Remarque : ici le piège était d'utiliser le résultat de la question précédente. [Q]

(d) Le volume de glace est $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, et celui du cornet est $V' = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \alpha$.

La glace fondue tient entièrement dans le cornet si $V \leq V'$.

On a $V \leq V' \Leftrightarrow 4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$ ce qui équivaut à $R \leq h \left(\frac{\tan \alpha}{2} \right)^{2/3}$ [Q]

4. (a) On sait que l'hypothèse signifie $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$. On a alors $z_{\Omega} = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{h}{\cos^2 \alpha}$.

D'après (3b), on trouve $a = h - z_{\Omega} = -h \tan^2 \alpha$ et $\lambda = \frac{a}{R} = -\sin \alpha$.

Dans ces conditions : $p_e = 25(1 - \lambda)^2(\lambda + 2) = 25(1 + \sin \alpha)^2(2 - \sin \alpha)$. [Q]

(b) D'après (3d), la condition est $4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$.

Puisque $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$, cela donne $4 \sin \alpha \leq \cos^4 \alpha$. Posons $s = \sin \alpha$.

On trouve : $\cos^4 \alpha - 4 \sin \alpha = (1 - s^2)^2 - 4s = s^4 - 2s^2 - 4s + 1$.

Posons $P(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$. On va étudier le signe de P sur $]0, 1[$.

On trouve $P'(x) = 4(x^3 - x - 1) = 4x(x^2 - 1) - 4 \leq -4$ sur $[0, 1]$.

Ainsi P est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Enfin $P(0) = 1$ et $P(1) = -4$.

L'application P (bijective de $]0, 1[$ sur $] -4, 1[$) s'annule en un point unique x_0 .

Avec une calculatrice on trouve $x \approx 0.2252704261$.

On trouve également $x_0 = \sin \alpha_0$, avec $\alpha_0 \approx 13.01878069^\circ \approx 13^\circ 01' 08''$.

Conclusion : le cornet contient toute la glace fondue $\Leftrightarrow \sin \alpha \geq x_0 \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha_0$. [Q]

(c) *Bonus à la fraise*

Avec les notations de la figure ci-contre :

On a $r = O\Omega' \sin \alpha = (h - HI - r) \sin \alpha$.

D'autre part $HI = R - \Omega H = R(1 - \sin \alpha)$.

Rappelons qu'on a l'égalité $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

On en déduit $HI = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha) = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

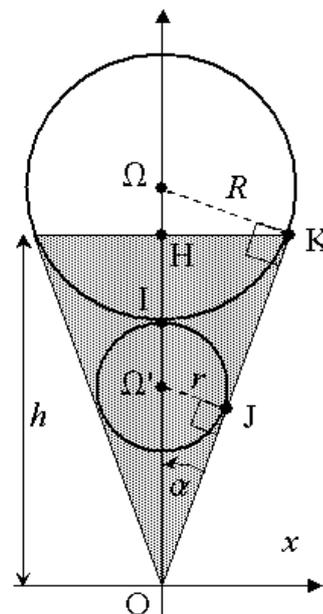
Ainsi $r = \frac{(h - HI) \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$.

On trouve finalement $r = \frac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}$.

Il en découle $\frac{r}{R} = \frac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2} \frac{\cos^2 \alpha}{h \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

Conclusion : $\frac{\text{fraise}}{\text{vanille}} = \left(\frac{r}{R} \right)^3 = \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^3$.

[Q]



5. Smarties en bonus

(a) Calcul du rayon d'un smartie.

 Voici une coupe du cornet dans le plan Oxz .

 (Le centre L du smartie est dans ce plan.)

 Pour simplifier on notera $c = \cos \alpha$ et $s = \sin \alpha$.

 On note z la cote de Ω et z' celle de Ω' .

 Soit X, Z les coordonnées du centre L du smartie.

On va exprimer les trois conditions suivantes :

- La distance de L à (OK) vaut ρ .
- On a les égalités $\Omega L = \rho + R$ et $\Omega' L = \rho + r$.

 L'équation de la droite (OK) est $sZ - cX = 0$.

 Pour L , on a : $d(L, (OK)) = sZ - cX = \rho$ (1)

 On a : $R = sz$, $r = sz'$, $z = \frac{h}{c^2}$, $z' = \frac{h}{(1+s)^2}$.

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega L = \rho + R \Leftrightarrow X^2 + (Z - z)^2 = (\rho + sz)^2 \quad (2) \\ \Omega' L = \rho + r \Leftrightarrow X^2 + (Z - z')^2 = (\rho + sz')^2 \quad (3) \end{array} \right.$$

Par différence de (2) et (3), il vient :

$$2(z' - z)Z + z^2 - z'^2 = 2\rho s(z - z') + s^2(z^2 - z'^2)$$

$$\text{Ainsi } Z = -\rho s + c^2 \frac{z + z'}{2} = -\rho s + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{1 - s^2}{(1 + s)^2} \right)$$

$$\text{On trouve donc } Z = -\rho s + \frac{h}{1 + s}.$$

On reporte dans (1) :

$$cX = sZ - \rho = -(1 + s^2)\rho + \frac{hs}{1 + s}.$$

 On reporte maintenant X et Z dans (2).

$$\text{Tout d'abord } Z - z = -\rho s + \frac{h}{1 + s} - \frac{h}{1 - s^2} = -\rho s + \frac{h}{1 + s} \left(1 - \frac{1}{1 - s} \right) = -\rho s - \frac{hs}{c^2}.$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \left((1 + s^2)^2 \rho^2 - 2 \frac{1 + s^2}{1 + s} h s \rho + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} \right) + s^2 \rho^2 + 2 \frac{h s^2}{c^2} \rho + \frac{h^2 s^2}{c^4} \\ &= \rho^2 + 2 \frac{h s}{c^2} \rho + \frac{h^2 s^2}{c^4} \\ &\Leftrightarrow (1 + s^2)^2 \rho^2 - 2 \frac{1 + s^2}{1 + s} h s \rho + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} + s^2 c^2 \rho^2 + 2 h s^2 \rho = c^2 \rho^2 + 2 h s \rho \\ &\Leftrightarrow ((1 + s^2)^2 - c^4) \rho^2 + 2 h s \rho \left(s - 1 - \frac{1 + s^2}{1 + s} \right) + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho^2 - \frac{h}{s(1 + s)} \rho + \frac{h^2}{4(1 + s)^2} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Le discriminant de (4) est } \Delta = \frac{h^2}{s^2(1 + s)^2} - \frac{h^2}{(1 + s)^2} = \frac{h^2 c^2}{s^2(1 + s)^2}$$

