Étude d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.

Ingénieur(e) chez un fabricant de glaces, vous êtes chargé(e) de concevoir un nouveau produit.
Dans tout le problème $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Vous allez effectuer une étude mathématique d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.
Il est recommandé d'accompagner les raisonnements d'une figure.

1. Soit R un réel strictement positif, et a un réel de l'intervalle $[-R, R]$.
   Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et $z \geq a$.
   Déterminer le volume V du domaine $\mathcal{D}$ en fonction de R et de $\lambda = \dfrac{a}{R}$. [S]
2. Dans toute la suite, α est un angle strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
   On considère un *cornet de glace* $\mathcal{C}$, représenté par un cône de révolution d'axe Oz, de sommet O, de demi-angle au sommet α, limité par les plans $z = 0$ et $z = h > 0$.
   Calculer le volume V' du cornet. [S]
3. On forme une glace en posant une boule de vanille, de rayon R, sur le cornet.
   Il est clair que suivant les valeurs de R, la boule repose sur le bord circulaire du cornet, ou s'appuie tangentiellement à l'intérieur de celui-ci.
   On sera donc amené à discuter suivant les valeurs de la variable R, en fonction de h et α.
   (a) Préciser les coordonnées du centre Ω de la boule de vanille. [S]
   (b) Donner le pourcentage p_e de glace se trouvant à l'extérieur du cornet. [S]
   (c) Pour quel R y a-t-il autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur du cornet ? [S]
   (d) S'il fait vraiment chaud, la boule de glace peut fondre complètement.
   Pour quelles valeurs de R la glace fondue tient-elle entièrement dans le cornet ? [S]
4. Dans cette question, on suppose que la boule de glace repose sur le bord circulaire du cornet, et que les génératrices du cornet (les droites issues du sommet) sont tangentes à la boule de glace tout le long du cercle de contact.
   (a) Avec ces nouvelles hypothèses, rappeler les résultats des questions (3a) et (3b). [S]
   (b) Pour quelles valeurs de α le cornet contient-il toute la glace fondue ?
   On donnera la réponse sous la forme $\alpha \geq \alpha_0$, avec une valeur approchée de α_0. [S]
   (c) Pour vous démarquer de la concurrence, vous décidez d'offrir en supplément une petite boule de glace à la fraise de rayon r, placée dans le cornet de la façon suivante :
   – Elle est située entièrement à l'intérieur du cornet, et tangente à celui-ci.
   – Elle est tangente à la boule de glace à la vanille.
   Calculer r en fonction de h et de α.
   Indiquer le rapport de volume de la glace à la fraise sur la glace à la vanille. [S]
5. Pour satisfaire une clientèle très exigeante, vous avez une idée supplémentaire.
   A partir de la configuration vue en (4c) on ajoute un ou plusieurs *smarties* à l'intérieur du cornet, tous tangents à la fois au cornet et aux deux boules de glace.
   Chaque smartie est assimilé à une boule de rayon $\rho > 0$.
   (a) Calculer le rayon d'un smartie, ainsi que la distance de son centre à l'axe Oz. [S]
   (b) En fonction de α, combien de smarties peut-on ainsi ajouter entre les deux boules ?
   Vérifier que ce nombre est toujours compris entre 6 et 9. [S]

Corrigé du problème

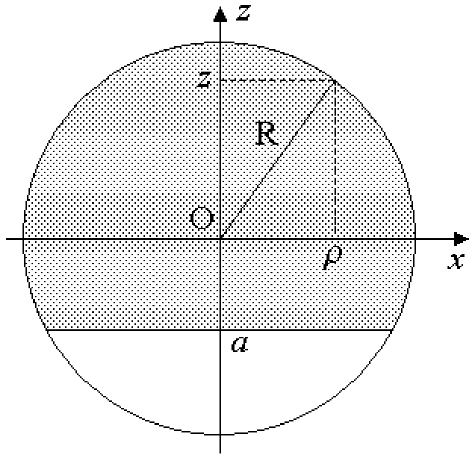
1. *Calcul du volume V.*

   On a représenté ici la *trace* du domaine $\mathcal{D}$ (qui est de révolution d'axe Oz) dans le plan Oxz.

   Le domaine $\mathcal{D}$ est représenté en cylindriques par :

   $\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [a, R], \quad \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$

   Le volume V est donc égal à :



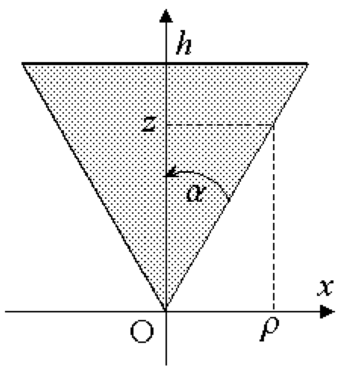
$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=a}^{R}\int_{\rho=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \pi\int_a^R (R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{3}\Big[3R^2 z - z^3\Big]_a^R = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2 a + a^3) \\ &= \frac{\pi}{3}(R-a)^2(2R+a) = \frac{\pi R^3}{3}(1-\lambda)^2(2+\lambda) \end{aligned}$$

   On vérifie que si $a = R$ ($\lambda = 1$) on a $V = 0$.
   De même, si $a = -R$ ($\lambda = -1$) on a $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume d'une boule de rayon R.) [Q]

2. *Volume V' du cornet.*
   Voici la trace de l'intérieur $\mathcal{C}$ du cornet dans le plan Oxz.
   Le domaine $\mathcal{C}$ est représenté en cylindriques par :

   $\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h], \quad \rho \in [0, z\tan\alpha]$

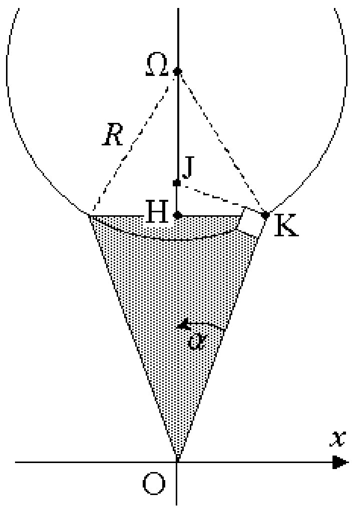
   Le volume V' est donc égal à :



$$V' = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h}\int_{\rho=0}^{z\tan\alpha} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^h z^2\tan^2\alpha\,\mathrm{d}z = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha.$$

   On aurait pu aussi utiliser la formule $V = \frac{hB}{3}$, où B est l'aire de la base du cornet, c'est-à-dire πr^2 avec $r = h\tan\alpha$.
   [Q]

3. (a) *Coordonnées du centre de la boule de glace*



   Voici la coupe de la glace dans le plan Oxz.

   On se reportera à la figure pour la définition de H, J, K.

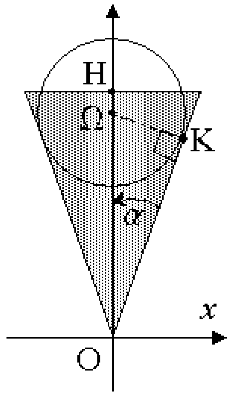
   Il est clair que la boule repose sur le bord circulaire du cône si le point Ω est situé sur ou au-dessus de J, c'est-à-dire si le rayon R est supérieur ou égal à la longueur JK.

   Or $JK = \dfrac{KH}{\cos\alpha}$ et $KH = h\tan\alpha$, donc $JK = \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

   Donc si $R \geq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ la boule repose sur le bord du cône.

   Dans ce cas, on trouve les coordonnées $(0, 0, z_\Omega)$ de Ω :

   $z_\Omega = OH + H\Omega = h + \sqrt{R^2 - HK^2} = h + \sqrt{R^2 - h^2\tan^2\alpha}$.



On illustre maintenant le cas où la boule de glace repose tangentiellement à l'intérieur du cornet.
Comme on vient de le voir, cela correspond à $R \leq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.
Dans ce cas, on a bien sûr $z_\Omega = \dfrac{\Omega K}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.
Finalement :

◇ Si $R \leq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ alors $z_\Omega = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

◇ Si $R \geq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ alors $z_\Omega = h + \sqrt{R^2 - h^2\tan^2\alpha}$.

Remarque : Si $R = \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ les deux expressions donnent $z_\Omega = \dfrac{h}{\cos^2\alpha}$.
Dans ce cas particulier la glace repose sur le bord circulaire du cornet, et les génératrices du cônes sont partout tangentes à la boule de glace. [Q]

(b) *Pourcentage de glace à l'extérieur du cornet.*

– Supposons que la glace repose sur le bord circulaire du cornet, donc $R \geq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Dans ce cas, le volume de glace extérieur V_e s'obtient avec la question 1.

Avec les notations de celle-ci : $a = h - z_\Omega = -\sqrt{R^2 - h^2\tan^2\alpha}$.

On peut alors écrire $\lambda = \dfrac{a}{R} = -\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{R^2}\tan^2\alpha}$ et $V_e = \dfrac{\pi R^3}{3}(1-\lambda)^2(2+\lambda)$.

Le volume total de la glace est égal à $V_t = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.
Le pourcentage de glace à l'extérieur est donc : $p_e = 100\dfrac{V_e}{V_t} = 25(1-\lambda)^2(2+\lambda)$.

Remarquons que lorsque $R \to +\infty$, alors $\lambda \to -1$ et $p_e \to 100$ (c'est logique.)

– Supposons que la glace s'appuie tangentiellement à l'intérieur du cornet.

Sous cette hypothèse, il y a encore un cas à distinguer.

Il est en effet possible que le rayon R soit petit au point que toute la glace soit intérieure au cornet : cela se produit quand $z_\Omega + R \leq h$.

On a les équivalences : $z_\Omega + R \leq h \Leftrightarrow \dfrac{R}{\sin\alpha} + R \leq h \Leftrightarrow R \leq \dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}h$.

On peut donc dire que si $R \leq \dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}h$ alors $p_e = 0$.

On suppose maintenant que R vérifie $\dfrac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \leq R \leq \dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Dans ce cas, le volume extérieur est situé entre la cote $z = h$ et la cote $z = z_\Omega + R$.

Cela revient à reprendre la question (1) avec $a = h - z_\Omega = h - \dfrac{R}{\sin\alpha}$.
On peut alors poser $\lambda = \dfrac{a}{R} = \dfrac{h}{R} - \dfrac{1}{\sin\alpha}$.
Comme précédemment, on trouve : $p_e = 100\dfrac{V_e}{V_t} = 25(1-\lambda)^2(2+\lambda)$.

[Q]

(c) Il y a autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur si $z_\Omega = h$.
Cela ne peut se produire que lorsque $R \leq \dfrac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ avec $z_\Omega = \dfrac{R}{\sin \alpha}$, donc $R = h \sin \alpha$.
Remarque : ici le piège était d'utiliser le résultat de la question précédente. [Q]

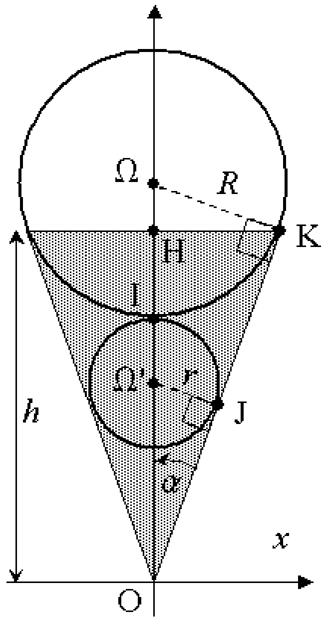
(d) Le volume de glace est $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, et celui du cornet est $V' = \dfrac{\pi h^3}{3}\tan^2 \alpha$.
La glace fondue tient entièrement dans le cornet si $V \leq V'$.
On a $V \leq V' \Leftrightarrow 4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$ ce qui équivaut à $R \leq h\Big(\dfrac{\tan \alpha}{2}\Big)^{2/3}$ [Q]

4. (a) On sait que l'hypothèse signifie $R = \dfrac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$. On a alors $z_\Omega = \dfrac{R}{\sin \alpha} = \dfrac{h}{\cos^2 \alpha}$.
D'après (3b), on trouve $a = h - z_\Omega = -h \tan^2 \alpha$ et $\lambda = \dfrac{a}{R} = -\sin \alpha$.
Dans ces conditions : $p_e = 25(1-\lambda)^2(\lambda + 2) = 25(1+\sin \alpha)^2(2 - \sin \alpha)$. [Q]

(b) D'après (3d), la condition est $4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$.
Puisque $R = \dfrac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$, cela donne $4 \sin \alpha \leq \cos^4 \alpha$. Posons $s = \sin \alpha$.
On trouve : $\cos^4 \alpha - 4 \sin \alpha = (1 - s^2)^2 - 4s = s^4 - 2s^2 - 4s + 1$.
Posons $P(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$. On va étudier le signe de P sur $]0, 1[$.
On trouve $P'(x) = 4(x^3 - x - 1) = 4x(x^2 - 1) - 4 \leq -4$ sur $[0, 1]$.
Ainsi P est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Enfin $P(0) = 1$ et $P(1) = -4$.
L'application P (bijective de $]0, 1[$ sur $]-4, 1[$) s'annule en un point unique x_0.
Avec une calculatrice on trouve $x \approx 0.2252704261$.
On trouve également $x_0 = \sin \alpha_0$, avec $\alpha_0 \approx 13.01878069° \approx 13°01'08''$.
Conclusion : le cornet contient toute la glace fondue $\Leftrightarrow \sin \alpha \geq x_0 \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha_0$. [Q]

(c) *Bonus à la fraise*

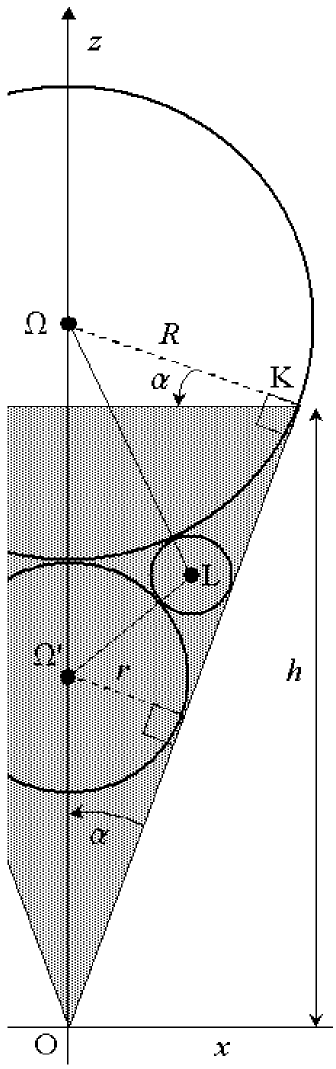
Avec les notations de la figure ci-contre :
On a $r = O\Omega' \sin \alpha = (h - HI - r) \sin \alpha$.
D'autre part $HI = R - \Omega H = R(1 - \sin \alpha)$.
Rappelons qu'on a l'égalité $R = \dfrac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.
On en déduit $HI = \dfrac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}(1 - \sin \alpha) = \dfrac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.
Ainsi $r = \dfrac{(h - HI)\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \dfrac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\Big(1 - \dfrac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\Big)$.
On trouve finalement $r = \dfrac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}$.
Il en découle $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}\,\dfrac{\cos^2 \alpha}{h \sin \alpha} = \dfrac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.
Conclusion : $\dfrac{\text{fraise}}{\text{vanille}} = \Big(\dfrac{r}{R}\Big)^3 = \Big(\dfrac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\Big)^3$.



[Q]

5. *Smarties en bonus*

(a) Calcul du rayon d'un smartie.
Voici une coupe du cornet dans le plan Oxz.
(Le centre L du smartie est dans ce plan.)
Pour simplifier on notera $c = \cos\alpha$ et $s = \sin\alpha$.
On note z la cote de Ω et z' celle de Ω'.
Soit X, Z les coordonnées du centre L du smartie.
On va exprimer les trois conditions suivantes :
– La distance de L à (OK) vaut ρ.
– On a les égalités $\Omega L = \rho + R$ et $\Omega' L = \rho + r$.
L'équation de la droite (OK) est $sZ - cX = 0$.
Pour L, on a : $d(L,(OK)) = sZ - cX = \rho \quad (1)$
On a : $R = sz,\ r = sz',\ z = \dfrac{h}{c^2},\ z' = \dfrac{h}{(1+s)^2}$.
Ainsi :
$$\begin{cases} \Omega L = \rho + R \Leftrightarrow X^2 + (Z-z)^2 = (\rho + sz)^2 & (2) \\ \Omega' L = \rho + r \Leftrightarrow X^2 + (Z-z')^2 = (\rho + sz')^2 & (3) \end{cases}$$
Par différence de (2) et (3), il vient :
$$2(z'-z)Z + z^2 - z'^2 = 2\rho s(z - z') + s^2(z^2 - z'^2)$$
Ainsi $Z = -\rho s + c^2 \dfrac{z+z'}{2} = -\rho s + \dfrac{h}{2}\Big(1 + \dfrac{1-s^2}{(1+s)^2}\Big)$
On trouve donc $Z = -\rho s + \dfrac{h}{1+s}$.
On reporte dans (1) :
$$cX = sZ - \rho = -(1+s^2)\rho + \frac{hs}{1+s}.$$
On reporte maintenant X et Z dans (2).



Tout d'abord $Z - z = -\rho s + \dfrac{h}{1+s} - \dfrac{h}{1-s^2} = -\rho s + \dfrac{h}{1+s}\Big(1 - \dfrac{1}{1-s}\Big) = -\rho s - \dfrac{hs}{c^2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\Big((1+s^2)^2\rho^2 - 2\frac{1+s^2}{1+s}hs\rho + \frac{h^2s^2}{(1+s)^2}\Big) + s^2\rho^2 + 2\frac{hs^2}{c^2}\rho + \frac{h^2s^2}{c^4}$$
$$= \rho^2 + 2\frac{hs}{c^2}\rho + \frac{h^2s^2}{c^4}$$
$$\Leftrightarrow (1+s^2)^2\rho^2 - 2\frac{1+s^2}{1+s}hs\rho + \frac{h^2s^2}{(1+s)^2} + s^2c^2\rho^2 + 2hs^2\rho = c^2\rho^2 + 2hs\rho$$
$$\Leftrightarrow ((1+s^2)^2 - c^4)\rho^2 + 2hs\rho\Big(s - 1 - \frac{1+s^2}{1+s}\Big) + \frac{h^2s^2}{(1+s)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \rho^2 - \frac{h}{s(1+s)}\rho + \frac{h^2}{4(1+s)^2} = 0 \quad (4)$$
Le discriminant de (4) est $\Delta = \dfrac{h^2}{s^2(1+s)^2} - \dfrac{h^2}{(1+s)^2} = \dfrac{h^2c^2}{s^2(1+s)^2}$