

## Étude d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.

Ingénieur(e) chez un fabricant de glaces, vous êtes chargé(e) de concevoir un nouveau produit.

Dans tout le problème  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

Vous allez effectuer une étude mathématique d'une glace à la vanille, à la fraise, et aux smarties.

Il est recommandé d'accompagner les raisonnements d'une figure.

1. Soit  $R$  un réel strictement positif, et  $a$  un réel de l'intervalle  $[-R, R]$ .

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  et  $z \geq a$ .

Déterminer le volume  $V$  du domaine  $\mathcal{D}$  en fonction de  $R$  et de  $\lambda = \frac{a}{R}$ . [S]

2. Dans toute la suite,  $\alpha$  est un angle strictement compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

On considère un *cornet de glace*  $\mathcal{C}$ , représenté par un cône de révolution d'axe  $Oz$ , de sommet  $O$ , de demi-angle au sommet  $\alpha$ , limité par les plans  $z = 0$  et  $z = h > 0$ .

Calculer le volume  $V'$  du cornet. [S]

3. On forme une glace en posant une boule de vanille, de rayon  $R$ , sur le cornet.

Il est clair que suivant les valeurs de  $R$ , la boule repose sur le bord circulaire du cornet, ou s'appuie tangentiellement à l'intérieur de celui-ci.

On sera donc amené à discuter suivant les valeurs de la variable  $R$ , en fonction de  $h$  et  $\alpha$ .

(a) Préciser les coordonnées du centre  $\Omega$  de la boule de vanille. [S]

(b) Donner le pourcentage  $p_e$  de glace se trouvant à l'extérieur du cornet. [S]

(c) Pour quel  $R$  y a-t-il autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur du cornet? [S]

(d) S'il fait vraiment chaud, la boule de glace peut fondre complètement.

Pour quelles valeurs de  $R$  la glace fondue tient-elle entièrement dans le cornet? [S]

4. Dans cette question, on suppose que la boule de glace repose sur le bord circulaire du cornet, et que les génératrices du cornet (les droites issues du sommet) sont tangentes à la boule de glace tout le long du cercle de contact.

(a) Avec ces nouvelles hypothèses, rappeler les résultats des questions (3a) et (3b). [S]

(b) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  le cornet contient-il toute la glace fondue?

On donnera la réponse sous la forme  $\alpha \geq \alpha_0$ , avec une valeur approchée de  $\alpha_0$ . [S]

(c) Pour vous démarquer de la concurrence, vous décidez d'offrir en supplément une petite boule de glace à la fraise de rayon  $r$ , placée dans le cornet de la façon suivante :

– Elle est située entièrement à l'intérieur du cornet, et tangente à celui-ci.

– Elle est tangente à la boule de glace à la vanille.

Calculer  $r$  en fonction de  $h$  et de  $\alpha$ .

Indiquer le rapport de volume de la glace à la fraise sur la glace à la vanille. [S]

5. Pour satisfaire une clientèle très exigeante, vous avez une idée supplémentaire.

A partir de la configuration vue en (4c) on ajoute un ou plusieurs *smarties* à l'intérieur du cornet, tous tangents à la fois au cornet et aux deux boules de glace.

Chaque smartie est assimilé à une boule de rayon  $\rho > 0$ .

(a) Calculer le rayon d'un smartie, ainsi que la distance de son centre à l'axe  $Oz$ . [S]

(b) En fonction de  $\alpha$ , combien de smarties peut-on ainsi ajouter entre les deux boules?

Vérifier que ce nombre est toujours compris entre 6 et 9. [S]

## Corrigé du problème

### 1. Calcul du volume $V$ .

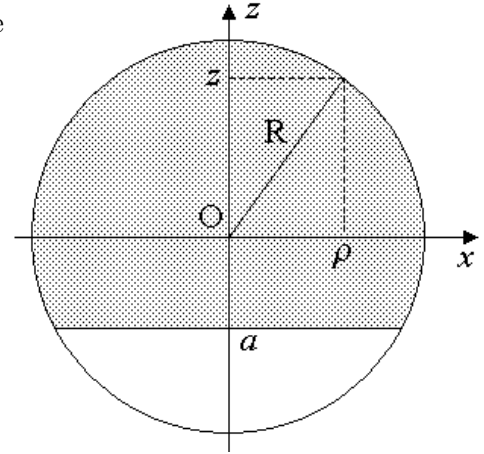
On a représenté ici la *trace* du domaine  $\mathcal{D}$  (qui est de révolution d'axe  $Oz$ ) dans le plan  $Oxz$ .

Le domaine  $\mathcal{D}$  est représenté en cylindriques par :

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [a, R], \quad \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$$

Le volume  $V$  est donc égal à :

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=a}^R \int_{\rho=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \pi \int_a^R (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \frac{\pi}{3} \left[ 3R^2 z - z^3 \right]_a^R = \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2 a + a^3) \\ &= \frac{\pi}{3} (R-a)^2 (2R+a) = \frac{\pi R^3}{3} (1-\lambda)^2 (2+\lambda) \end{aligned}$$



On vérifie que si  $a = R$  ( $\lambda = 1$ ) on a  $V = 0$ .

De même, si  $a = -R$  ( $\lambda = -1$ ) on a  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  (volume d'une boule de rayon  $R$ .) [Q]

### 2. Volume $V'$ du cornet.

Voici la trace de l'intérieur  $\mathcal{C}$  du cornet dans le plan  $Oxz$ .

Le domaine  $\mathcal{C}$  est représenté en cylindriques par :

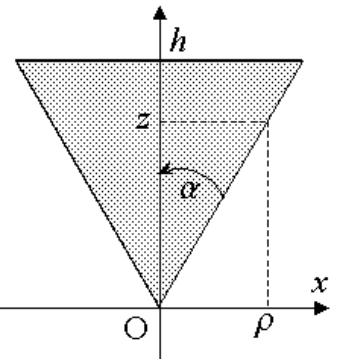
$$\theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h], \quad \rho \in [0, z \tan \alpha]$$

Le volume  $V'$  est donc égal à :

$$V' = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{\rho=0}^{z \tan \alpha} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \pi \int_0^h z^2 \tan^2 \alpha \, dz = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \alpha.$$

On aurait pu aussi utiliser la formule  $V = \frac{hB}{3}$ , où  $B$  est l'aire de la base du cornet, c'est-à-dire  $\pi r^2$  avec  $r = h \tan \alpha$ .

[Q]



### 3. (a) Coordonnées du centre de la boule de glace

Voici la coupe de la glace dans le plan  $Oxz$ .

On se reportera à la figure pour la définition de  $H, J, K$ .

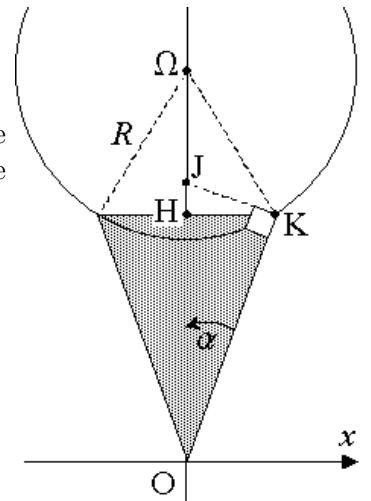
Il est clair que la boule repose sur le bord circulaire du cône si le point  $\Omega$  est situé sur ou au-dessus de  $J$ , c'est-à-dire si le rayon  $R$  est supérieur ou égal à la longueur  $JK$ .

$$\text{Or } JK = \frac{KH}{\cos \alpha} \text{ et } KH = h \tan \alpha, \text{ donc } JK = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Donc si  $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$  la boule repose sur le bord du cône.

Dans ce cas, on trouve les coordonnées  $(0, 0, z_\Omega)$  de  $\Omega$  :

$$z_\Omega = OH + H\Omega = h + \sqrt{R^2 - HK^2} = h + \sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}.$$



On illustre maintenant le cas où la boule de glace repose tangentielle-  
mentiellement à l'intérieur du cornet.

Comme on vient de le voir, cela correspond à  $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

Dans ce cas, on a bien sûr  $z_\Omega = \frac{\Omega K}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$ .

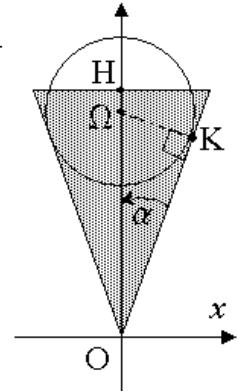
Finalement :

◇ Si  $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$  alors  $z_\Omega = \frac{R}{\sin \alpha}$ .

◇ Si  $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$  alors  $z_\Omega = h + \sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}$ .

Remarque : Si  $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$  les deux expressions donnent  $z_\Omega = \frac{h}{\cos^2 \alpha}$ .

Dans ce cas particulier la glace repose sur le bord circulaire du cornet, et les génératrices  
du cônes sont partout tangentes à la boule de glace. [Q]



(b) *Pourcentage de glace à l'extérieur du cornet.*

– Supposons que la glace repose sur le bord circulaire du cornet, donc  $R \geq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

Dans ce cas, le volume de glace extérieur  $V_e$  s'obtient avec la question 1.

Avec les notations de celle-ci :  $a = h - z_\Omega = -\sqrt{R^2 - h^2 \tan^2 \alpha}$ .

On peut alors écrire  $\lambda = \frac{a}{R} = -\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \tan^2 \alpha}$  et  $V_e = \frac{\pi R^3}{3} (1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$ .

Le volume total de la glace est égal à  $V_t = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

Le pourcentage de glace à l'extérieur est donc :  $p_e = 100 \frac{V_e}{V_t} = 25(1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$ .

Remarquons que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , alors  $\lambda \rightarrow -1$  et  $p_e \rightarrow 100$  (c'est logique.)

– Supposons que la glace s'appuie tangentielle-mentiellement à l'intérieur du cornet.

Sous cette hypothèse, il y a encore un cas à distinguer.

Il est en effet possible que le rayon  $R$  soit petit au point que toute la glace soit intérieure  
au cornet : cela se produit quand  $z_\Omega + R \leq h$ .

On a les équivalences :  $z_\Omega + R \leq h \Leftrightarrow \frac{R}{\sin \alpha} + R \leq h \Leftrightarrow R \leq \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h$ .

On peut donc dire que si  $R \leq \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h$  alors  $p_e = 0$ .

On suppose maintenant que  $R$  vérifie  $\frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

Dans ce cas, le volume extérieur est situé entre la cote  $z = h$  et la cote  $z = z_\Omega + R$ .

Cela revient à reprendre la question (1) avec  $a = h - z_\Omega = h - \frac{R}{\sin \alpha}$ .

On peut alors poser  $\lambda = \frac{a}{R} = \frac{h}{R} - \frac{1}{\sin \alpha}$ .

Comme précédemment, on trouve :  $p_e = 100 \frac{V_e}{V_t} = 25(1 - \lambda)^2 (2 + \lambda)$ .

[Q]

(c) Il y a autant de glace à l'intérieur qu'à l'extérieur si  $z_\Omega = h$ .

Cela ne peut se produire que lorsque  $R \leq \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$  avec  $z_\Omega = \frac{R}{\sin \alpha}$ , donc  $R = h \sin \alpha$ .

Remarque : ici le piège était d'utiliser le résultat de la question précédente. [Q]

(d) Le volume de glace est  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , et celui du cornet est  $V' = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \alpha$ .

La glace fondue tient entièrement dans le cornet si  $V \leq V'$ .

On a  $V \leq V' \Leftrightarrow 4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$  ce qui équivaut à  $R \leq h \left( \frac{\tan \alpha}{2} \right)^{2/3}$  [Q]

4. (a) On sait que l'hypothèse signifie  $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ . On a alors  $z_\Omega = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{h}{\cos^2 \alpha}$ .

D'après (3b), on trouve  $a = h - z_\Omega = -h \tan^2 \alpha$  et  $\lambda = \frac{a}{R} = -\sin \alpha$ .

Dans ces conditions :  $p_e = 25(1 - \lambda)^2(\lambda + 2) = 25(1 + \sin \alpha)^2(2 - \sin \alpha)$ . [Q]

(b) D'après (3d), la condition est  $4R^3 \leq h^3 \tan^2 \alpha$ .

Puisque  $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ , cela donne  $4 \sin \alpha \leq \cos^4 \alpha$ . Posons  $s = \sin \alpha$ .

On trouve :  $\cos^4 \alpha - 4 \sin \alpha = (1 - s^2)^2 - 4s = s^4 - 2s^2 - 4s + 1$ .

Posons  $P(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ . On va étudier le signe de  $P$  sur  $]0, 1[$ .

On trouve  $P'(x) = 4(x^3 - x - 1) = 4x(x^2 - 1) - 4 \leq -4$  sur  $[0, 1]$ .

Ainsi  $P$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ . Enfin  $P(0) = 1$  et  $P(1) = -4$ .

L'application  $P$  (bijective de  $]0, 1[$  sur  $] -4, 1[$ ) s'annule en un point unique  $x_0$ .

Avec une calculatrice on trouve  $x \approx 0.2252704261$ .

On trouve également  $x_0 = \sin \alpha_0$ , avec  $\alpha_0 \approx 13.01878069^\circ \approx 13^\circ 01' 08''$ .

Conclusion : le cornet contient toute la glace fondue  $\Leftrightarrow \sin \alpha \geq x_0 \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha_0$ . [Q]

(c) *Bonus à la fraise*

Avec les notations de la figure ci-contre :

On a  $r = O\Omega' \sin \alpha = (h - HI - r) \sin \alpha$ .

D'autre part  $HI = R - \Omega H = R(1 - \sin \alpha)$ .

Rappelons qu'on a l'égalité  $R = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

On en déduit  $HI = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha) = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .

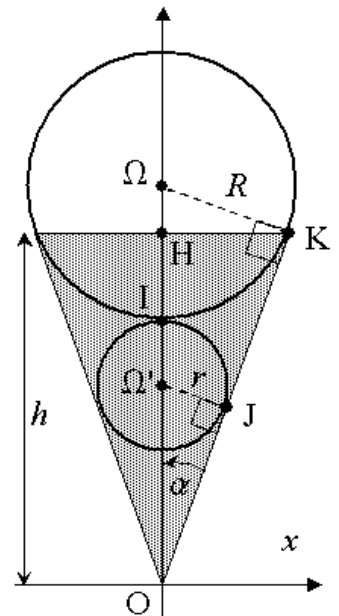
Ainsi  $r = \frac{(h - HI) \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$ .

On trouve finalement  $r = \frac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}$ .

Il en découle  $\frac{r}{R} = \frac{h \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2} \frac{\cos^2 \alpha}{h \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .

Conclusion :  $\frac{\text{fraise}}{\text{vanille}} = \left( \frac{r}{R} \right)^3 = \left( \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^3$ .

[Q]



## 5. Smarties en bonus

(a) Calcul du rayon d'un smartie.

 Voici une coupe du cornet dans le plan  $Oxz$ .

 (Le centre  $L$  du smartie est dans ce plan.)

 Pour simplifier on notera  $c = \cos \alpha$  et  $s = \sin \alpha$ .

 On note  $z$  la cote de  $\Omega$  et  $z'$  celle de  $\Omega'$ .

 Soit  $X, Z$  les coordonnées du centre  $L$  du smartie.

On va exprimer les trois conditions suivantes :

- La distance de  $L$  à  $(OK)$  vaut  $\rho$ .
- On a les égalités  $\Omega L = \rho + R$  et  $\Omega' L = \rho + r$ .

 L'équation de la droite  $(OK)$  est  $sZ - cX = 0$ .

 Pour  $L$ , on a :  $d(L, (OK)) = sZ - cX = \rho$  (1)

 On a :  $R = sz$ ,  $r = sz'$ ,  $z = \frac{h}{c^2}$ ,  $z' = \frac{h}{(1+s)^2}$ .

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega L = \rho + R \Leftrightarrow X^2 + (Z - z)^2 = (\rho + sz)^2 \quad (2) \\ \Omega' L = \rho + r \Leftrightarrow X^2 + (Z - z')^2 = (\rho + sz')^2 \quad (3) \end{array} \right.$$

Par différence de (2) et (3), il vient :

$$2(z' - z)Z + z^2 - z'^2 = 2\rho s(z - z') + s^2(z^2 - z'^2)$$

$$\text{Ainsi } Z = -\rho s + c^2 \frac{z + z'}{2} = -\rho s + \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{1 - s^2}{(1 + s)^2} \right)$$

$$\text{On trouve donc } Z = -\rho s + \frac{h}{1 + s}.$$

On reporte dans (1) :

$$cX = sZ - \rho = -(1 + s^2)\rho + \frac{hs}{1 + s}.$$

 On reporte maintenant  $X$  et  $Z$  dans (2).

$$\text{Tout d'abord } Z - z = -\rho s + \frac{h}{1 + s} - \frac{h}{1 - s^2} = -\rho s + \frac{h}{1 + s} \left( 1 - \frac{1}{1 - s} \right) = -\rho s - \frac{hs}{c^2}.$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \left( (1 + s^2)^2 \rho^2 - 2 \frac{1 + s^2}{1 + s} h s \rho + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} \right) + s^2 \rho^2 + 2 \frac{h s^2}{c^2} \rho + \frac{h^2 s^2}{c^4} \\ &= \rho^2 + 2 \frac{h s}{c^2} \rho + \frac{h^2 s^2}{c^4} \\ &\Leftrightarrow (1 + s^2)^2 \rho^2 - 2 \frac{1 + s^2}{1 + s} h s \rho + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} + s^2 c^2 \rho^2 + 2 h s^2 \rho = c^2 \rho^2 + 2 h s \rho \\ &\Leftrightarrow ((1 + s^2)^2 - c^4) \rho^2 + 2 h s \rho \left( s - 1 - \frac{1 + s^2}{1 + s} \right) + \frac{h^2 s^2}{(1 + s)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho^2 - \frac{h}{s(1 + s)} \rho + \frac{h^2}{4(1 + s)^2} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Le discriminant de (4) est } \Delta = \frac{h^2}{s^2(1 + s)^2} - \frac{h^2}{(1 + s)^2} = \frac{h^2 c^2}{s^2(1 + s)^2}$$

