CH.0 : NOTIONS D' ANALYSE VECTORIELLE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

CH.0 : NOTIONS D' ANALYSE VECTORIELLE 1
I. QUELQUES OPERATEURS 1
I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA » 1
I.2. LE GRADIENT 2
I.3. LA DIVERGENCE 2
I.4. LE ROTATIONNEL 2
I.5. LE LAPLACIEN 2
II. QUELQUES RELATIONS D' ANALYSE VECTORIELLE 3
II.1. LES QUATRE RELATIONS FONDAMENTALES 3
II.2. COMMENTAIRES 3
III. QUELQUES THEOREMES 3
III.1. THEOREME DE STOKES-AMPERE 3
III.2. THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKI 3
IV. QUELQUES CHAMPS PARTICULIERS 4
IV.1. CHAMP DE GRADIENT 4
IV.1.1. Définition 4
IV.1.2. Condition nécessaire et suffisante 4
IV.1.3. Propriétés 4
IV.2. CHAMP DE ROTATIONNEL 4
IV.2.1. Définition 4
IV.2.2. Condition nécessaire et suffisante 4
IV.2.3. Propriétés 4
V. QUELQUES AUTRES SYSTEMES DE COORDONNEES 5
V.1. ASPECT INTRINSEQUE DES OPERATEURS 5
V.2. EXPRESSION DES OPERATEURS DANS CES SYSTEMES 5
V.2.1. Coordonnées cylindriques 5
V.2.2. Coordonnées sphériques 6
VI. CONCLUSION 6

****

I. QUELQUES OPERATEURS

I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA »

• Dans un premier temps, nous nous limiterons aux coordonnées **cartésiennes**.

• Dans ce système de coordonnées **uniquement**, introduisons un opérateur symbolique appelé « NABLA » et noté $\vec{\nabla}$; cet opérateur vectoriel est défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

I.2. LE GRADIENT

- Soit $U(x,y,z,t)$ un champ **scalaire** ; on pose :

$$\overrightarrow{gradU} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

- **Rq :** le gradient est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ scalaire.

I.3. LA DIVERGENCE

- Soit $\vec{A}(x,y,z,t)$ un champ **vectoriel** ; on pose :

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- **Rq1 :** la divergence est un opérateur scalaire qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

  Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_j(i)\vec{e}_j$, avec $i \neq j$ représentant l'une quelconque des variables x, y ou z, on peut vérifier que sa divergence est nulle (cette remarque est valable pour tous les systèmes de coordonnées).

I.4. LE ROTATIONNEL

- Toujours pour un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t)$, on pose :

$$\overrightarrow{rot\vec{A}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

- **Rq1 :** le rotationnel est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

  Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_i(i)\vec{e}_i$, on peut constater que son rotationnel est toujours nul, quel que soit le système de coordonnées.

I.5. LE LAPLACIEN

- **Champ scalaire :**

$$\Delta U(x,y,z,t) = (\vec{\nabla})^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

- **Champ vectoriel :**

$$\Delta\vec{A}(x,y,z,t) = (\vec{\nabla})^2\vec{A} = [(\vec{\nabla})^2 A_x]\vec{e}_x + [(\vec{\nabla})^2 A_y]\vec{e}_y + [(\vec{\nabla})^2 A_z]\vec{e}_z$$
$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z$$

Rq1: tous ces opérateurs sont **LINEAIRES**.

Rq2 : le gradient, la divergence et le rotationnel ont la dimension de l'inverse d'une longueur (m^{-1}) ; le laplacien a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré (m^{-2}) : y penser lors d'une analyse dimensionnelle.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.