CH.0 : NOTIONS D' ANALYSE VECTORIELLE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. QUELQUES OPERATEURS

I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA »

• Dans un premier temps, nous nous limiterons aux coordonnées **cartésiennes**.

• Dans ce système de coordonnées **uniquement**, introduisons un opérateur symbolique appelé « NABLA » et noté $\vec{\nabla}$; cet opérateur vectoriel est défini par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z}$$

I.2. LE GRADIENT

- Soit $U(x,y,z,t)$ un champ **scalaire** ; on pose :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U=\vec{\nabla}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z}$$

- **Rq :** le gradient est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ scalaire.

I.3. LA DIVERGENCE

- Soit $\vec{A}(x,y,z,t)$ un champ **vectoriel** ; on pose :

$$\boxed{div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

- **Rq1 :** la divergence est un opérateur scalaire qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A}=A_j(i)\vec{e}_j$, avec $i\neq j$ représentant l'une quelconque des variables x,y ou z, on peut vérifier que sa divergence est nulle (cette remarque est valable pour tous les systèmes de coordonnées).

I.4. LE ROTATIONNEL

- Toujours pour un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t)$, on pose :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z}$$

- **Rq1 :** le rotationnel est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A}=A_i(i)\vec{e}_i$, on peut constater que son rotationnel est toujours nul, quel que soit le système de coordonnées.

I.5. LE LAPLACIEN

- **<u>Champ scalaire</u> :**

$$\boxed{\Delta U(x,y,z,t)=(\vec{\nabla})^2U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

- **<u>Champ vectoriel</u> :**

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta\vec{A}(x,y,z,t)=(\vec{\nabla})^2\vec{A}=[(\vec{\nabla})^2A_x]\vec{e}_x+[(\vec{\nabla})^2A_y]\vec{e}_y+[(\vec{\nabla})^2A_z]\vec{e}_z\\ =\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z\end{gathered}}$$

Rq1: tous ces opérateurs sont **LINEAIRES**.

Rq2 : le gradient, la divergence et le rotationnel ont la dimension de l'inverse d'une longueur (m^{-1}) ; le laplacien a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré (m^{-2}) : y penser lors d'une analyse dimensionnelle.