



OUTILS MATHÉMATIQUES

COURS

CH.0 : NOTIONS D'ANALYSE VECTORIELLE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

CH.0 : NOTIONS D'ANALYSE VECTORIELLE	1
I. QUELQUES OPERATEURS	1
I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA »	1
I.2. LE GRADIENT	2
I.3. LA DIVERGENCE	2
I.4. LE ROTATIONNEL	2
I.5. LE LAPLACIEN	2
II. QUELQUES RELATIONS D' ANALYSE VECTORIELLE	3
II.1. LES QUATRE RELATIONS FONDAMENTALES	3
II.2. COMMENTAIRES	3
III. QUELQUES THEOREMES	3
III.1. THEOREME DE STOKES-AMPERE	3
III.2. THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKI	3
IV. QUELQUES CHAMPS PARTICULIERS	4
IV.1. CHAMP DE GRADIENT	4
IV.1.1. Définition	4
IV.1.2. Condition nécessaire et suffisante	4
IV.1.3. Propriétés	4
IV.2. CHAMP DE ROTATIONNEL	4
IV.2.1. Définition	4
IV.2.2. Condition nécessaire et suffisante	4
IV.2.3. Propriétés	4
V. QUELQUES AUTRES SYSTEMES DE COORDONNEES	5
V.1. ASPECT INTRINSEQUE DES OPERATEURS	5
V.2. EXPRESSION DES OPERATEURS DANS CES SYSTEMES	5
V.2.1. Coordonnées cylindriques	5
V.2.2. Coordonnées sphériques	6
VI. CONCLUSION	6

I. QUELQUES OPERATEURS

I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA »

- Dans un premier temps, nous nous limiterons aux coordonnées **cartésiennes**.
- Dans ce système de coordonnées **uniquement**, introduisons un opérateur symbolique appelé « NABLA » et noté $\vec{\nabla}$; cet opérateur vectoriel est défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

1.2. LE GRADIENT

- Soit $U(x, y, z, t)$ un champ **scalaire** ; on pose :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

- **Rq** : le gradient est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ scalaire.

1.3. LA DIVERGENCE

- Soit $\vec{A}(x, y, z, t)$ un champ **vectoriel** ; on pose :

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- **Rq1** : la divergence est un opérateur scalaire qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.
- **Rq2** : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_j(i)\vec{e}_j$, avec $i \neq j$ représentant l'une quelconque des variables x, y ou z , on peut vérifier que sa divergence est nulle (cette remarque est valable pour tous les systèmes de coordonnées).

1.4. LE ROTATIONNEL

- Toujours pour un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z, t)$, on pose :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

- **Rq1** : le rotationnel est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.
- **Rq2** : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_i(i)\vec{e}_i$, on peut constater que son rotationnel est toujours nul, quel que soit le système de coordonnées.

1.5. LE LAPLACIEN

- **Champ scalaire** :

$$\Delta U(x, y, z, t) = (\vec{\nabla})^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

- **Champ vectoriel** :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}(x, y, z, t) &= (\vec{\nabla})^2 \vec{A} = [(\vec{\nabla})^2 A_x] \vec{e}_x + [(\vec{\nabla})^2 A_y] \vec{e}_y + [(\vec{\nabla})^2 A_z] \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Rq1: tous ces opérateurs sont **LINEAIRES**.

Rq2 : le gradient, la divergence et le rotationnel ont la dimension de l'inverse d'une longueur (m^{-1}) ; le laplacien a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré (m^{-2}) : y penser lors d'une analyse dimensionnelle.