Une étude de suite récurrente

On pourra admettre le résultat suivant (égalité des accroissements finis) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

Soient x et y deux éléments de l'intervalle I, avec $x < y$.

Alors il existe un réel c dans $]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$.

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right)$.
Soit a un réel. On définit une suite u par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Si la suite u est convergente dans $\mathbb{R}$, quelle est sa seule limite possible ? [S]
   (b) Montrer que pout tout x de $\mathbb{R}$: $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq x$ et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq x$. [S]
2. Dans les questions $2, 3, 4$, on suppose $0 < \lambda \leq \frac{4}{7}$, et $0 \leq a \leq 1$.
   (a) Montrer que $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x)$. [S]
   (b) Préciser la monotonie et la limite de la suite u, suivant les valeurs de a. [S]
3. (a) Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors a $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right)$. [S]
   (b) En déduire que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n$. [S]
4. (a) Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors a $0 \leq \frac{1}{2} - f(x) \leq \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)$. [S]
   (b) En déduire que si $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$. [S]
5. Dans cette question, on suppose que $\frac{4}{7} < \lambda \leq \frac{8}{7}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.
   (a) Effectuer une étude soignée des variations de l'application f sur $[0, 1]$.
   On précisera notamment les réels β, γ tels que $\frac{1}{2} < \beta < \gamma$, $f'(\beta) = 0$ et $f(\gamma) = \frac{1}{2}$. [S]
   (b) Montrer que tous les termes u_n de la suite u appartiennent au segment $[0, 1]$. [S]
   (c) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$. On précisera en particulier si la suite u est monotone, éventuellement à partir d'un certain rang. [S]
6. Dans cette question, on suppose que $\frac{8}{7} < \lambda < \frac{4}{3}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.
   On pourra réutiliser les calculs de la question (5), et notamment les notations β et γ.
   (a) Étudier les variations de f sur le segment $\left[-\frac{1}{6}, 1\right]$.
   On notera δ (sans chercher à le calculer) le réel de $]\gamma, 1[$ tel que $f(\delta) = 0$. [S]
   (b) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$. [S]
7. En supposant toujours $0 \leq a \leq 1$, étudier la suite u quand $\lambda = \frac{4}{3}$.
   On illustrera graphiquement la convergence pour une valeur donnée de $u_0 = a$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Si la suite u converge vers un réel ℓ, alors, on obtient $f(\ell)=\ell$ par passage à la limite dans la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ (en effet f est définie sur $\mathbb{R}$, et continue.)
Mais on a les équivalences : $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell=\ell+\lambda\left(\frac{1}{8}-\ell^3\right) \Leftrightarrow \ell^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \ell=\frac{1}{2}$.
Donc si la suite u converge, sa limite est nécessairement $\frac{1}{2}$. [Q]

   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)-x=\lambda\left(\frac{1}{8}-x^3\right)=\frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{2}-x\right)(4x^2+2x+1)$.
Le trinôme $4x^2+2x+1=3x^2+(x+1)^2$ reste strictement positif sur $\mathbb{R}$.
On en déduit (puisque $\lambda>0$) que $f(x)-x$ a le signe de $\frac{1}{2}-x$.
Autrement dit : $x\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\ge x$ et $x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\le x$. [Q]

2. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x)-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{4}(4x^2+2x+1)\right)$.
Pour tout x de $[0,1]$, on a $\frac{\lambda}{4}(4x^2+2x+1)\le\frac{7\lambda}{4}\le 1$.
On en déduit que sur $[0,1]$, la quantité $f(x)-\frac{1}{2}$ a le signe de $x-\frac{1}{2}$.
Autrement dit : $0\le x\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\le f(x)$. [Q]

   (b) On utilise les résultats obtenus dans les deux questions précédentes.
On a en particulier l'implication $0\le x\le\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le x\le f(x)\le\frac{1}{2}$.
De même, $\frac{1}{2}\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\le f(x)\le x\le 1$.
Compte tenu de la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, et par des récurrences évidentes, on en déduit alors les résultats suivants, en fonction de la valeur de $u_0=a$:
   - Si $0\le a\le\frac{1}{2}$, alors pour tout n, on a les inégalités : $0\le u_n\le u_{n+1}\le\frac{1}{2}$.
La suite u, croissante et majorée, converge vers $\frac{1}{2}$ (seule limite possible.)
   - Si $\frac{1}{2}\le a\le 1$, alors pour tout n, on a les inégalités : $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le u_n\le 1$.
La suite u, décroissante et minorée, converge vers $\frac{1}{2}$ (seule possibilité.)
   - Bien sûr, si $a=\frac{1}{2}$, la suite u est constante en $\frac{1}{2}$.

   [Q]

3. (a) Le résultat est évident si $x=\frac{1}{2}$. On suppose donc $\frac{1}{2}<x\le 1$.
On utilise l'égalité des accroissements finis, rappelée dans l'énoncé.
Il existe donc c_x dans $\left]\frac{1}{2},x\right[$ tel que : $f(x)-\frac{1}{2}=f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(c_x)$.
Or $f':t\mapsto 1-3\lambda x^2$ est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi $f'(c_x)\le f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
Puisque $f(x)\ge\frac{1}{2}$, on a donc obtenu : $0\le f(x)-\frac{1}{2}\le\left(x-\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)$. [Q]

   (b) Si $\frac{1}{2}\le u_0=a\le 1$, on sait que $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2}\le u_n\le 1$. De plus $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{4}\lambda$.
Les égalités $u_{n+1}=f(u_n)$ impliquent alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_{n+1}-\frac{1}{2}\le\left(u_n-\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
Ainsi, par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n-\frac{1}{2}\le\left(u_0-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)^n\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)^n$. [Q]