

## Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives

PARTIE I : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES.

On dit qu'une application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est un *polynôme trigonométrique* s'il existe une famille  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de nombres complexes, les  $c_k$  étant tous nuls sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, telle que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ .

Dans cette partie, on suppose que  $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  un polynôme trigonométrique.

1. Pour tout  $p$  de  $\mathbb{Z}$ , calculer  $I_p = \int_0^{2\pi} e^{ipx} dx$ . [S]
2. En déduire que pour tout entier relatif  $m$ , on a l'égalité :  $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$ . [S]
3. Soit  $g : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}$  un polynôme trigonométrique.

Montrer qu'on a l'égalité  $g = f$  si et seulement si, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a  $d_k = c_k$ . [S]

4. On suppose que  $f$  n'est pas l'application nulle. Prouver le résultat suivant :

Il existe un unique couple  $(p, A)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}[X]$  tel que  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-ipx} A(e^{ix}) \\ A(0) \neq 0 \end{cases}$  [S]

5. Vérifier que les applications  $x \mapsto \cos^5 x$  et  $x \mapsto \sin^5 x$  sont des polynômes trigonométriques. Écrire ces applications sous la forme indiquée dans la question précédente. [S]

PARTIE II : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES À VALEURS RÉELLES.

Dans cette partie,  $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  est un polynôme trigonométrique à *valeurs réelles*.

On suppose  $f \neq 0$ , et on désigne toujours par  $(p, A)$  le couple défini dans la question I-4.

1. Montrer que pour tout entier relatif  $k$ , on a l'égalité :  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . [S]
2. En déduire  $p \geq 0$ , et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-p}^p c_k e^{ikx}$ . Prouver que  $A$  est de degré  $2p$ .  
Si on pose  $A = \sum_{n=0}^{2p} \alpha_n X^n$ , montrer que  $\forall n \in \{0, \dots, 2p\}, \alpha_{2p-n} = \overline{\alpha_n}$ . [S]
3. Montrer qu'il existe une famille unique  $(a_0, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$  de  $2p+1$  réels telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^p (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

On vérifiera que  $a_0 = c_0$  et  $\forall k \in \{1, \dots, p\}, a_k = 2 \operatorname{Re} c_k$  et  $b_k = -2 \operatorname{Im} c_k$ . [S]

4. En utilisant la question II-2, Montrer que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ , on a  $A(z) = z^{2p} \overline{A(1/\overline{z})}$ . [S]
5. Soit  $u = e^{i\theta}$  une racine de module 1 de  $A$ , de multiplicité  $m$ .

Montrer qu'on peut écrire :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left( \sin \frac{x - \theta}{2} \right)^m g(x)$ , avec  $g(\theta) \neq 0$ .

Montrer que si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , alors l'entier  $m$  est pair. [S]



6. Soit  $v$  une racine de  $A$ , avec la multiplicité  $m \geq 1$ , et telle que  $|v| \neq 1$ .  
Montrer que  $v \neq 0$  et que  $v' = 1/\bar{v}$  est racine de  $A$  avec la même multiplicité.

Indication : écrire  $A = (X - v)^m \sum_{k=0}^{2p-m} d_k X^k$  et utiliser la question II-4 [S]

PARTIE III : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES À VALEURS DANS  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  un polynôme trigonométrique non nul, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

On pourra utiliser les résultats des parties I et II.

En particulier il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , et  $A$  dans  $\mathbb{C}[X]$  (avec  $\deg A = 2p$ ) tels que :

- Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \sum_{k=-p}^p c_k e^{ikx} = e^{-ipx} A(e^{ix})$ .
- Le coefficient  $c_p$  est non nul et pour tout  $k$  de  $\{-p, \dots, p\}$ ,  $c_{-k} = \bar{c}_k$ 
  1. En utilisant II-5 et II-6, montrer que  $A$  peut s'écrire  $A = \lambda BC$  où :
    - Le facteur  $\lambda$  est une constante complexe non nulle.
    - Le polynôme  $B$  s'écrit sous la forme  $B = \prod_{k=1}^r (X - e^{i\theta_k})^{2m_k}$ , où :
      - ◇ Les réels  $\theta_k$  sont distincts deux à deux modulo  $2\pi$ .
      - ◇ Les  $m_k$  sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
      - ◇ L'entier  $r$  est positif ou nul. Si  $r = 0$ , on convient que  $B = 1$ .
    - Le polynôme  $C$  s'écrit sous la forme  $C = \prod_{k=1}^s ((X - v_k)(X - 1/\bar{v}_k))^{n_k}$ , où :
      - ◇ Les  $v_k$  sont des complexes de module  $< 1$ , distincts deux à deux.
      - ◇ Les  $n_k$  sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
      - ◇ L'entier  $s$  est positif ou nul. Si  $s = 0$ , on convient que  $C = 1$ .

On vérifiera que  $\sum_{k=1}^r m_k + \sum_{k=1}^s n_k = p$ . [S]

2. Soit  $x$  un réel, et soit  $z$  un nombre complexe non nul.  
Établir l'égalité  $|(e^{ix} - z)(e^{ix} - 1/\bar{z})| = |e^{ix} - z|^2 / |z|$ . [S]
3. En déduire l'existence d'un polynôme  $Q$  de degré  $p$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |Q(e^{ix})|^2$ .  
On pourra noter que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f(x) = |f(x)|$ . [S]
4. On suppose que  $f$  est non constante. Cela implique donc  $p \geq 1$ .  
L'application  $f$  étant continue, elle est bornée sur tout segment (admis ici.)  
On note  $M = \sup\{f(x), x \in [0, 2\pi]\}$  ( $f$  étant  $2\pi$ -périodique, on a  $M = \sup f$  sur  $\mathbb{R}$ .)  
On note  $Q = \sum_{k=0}^p \beta_k X^k$  le polynôme défini à la question précédente.
  - (a) En identifiant, prouver  $c_0 = \sum_{k=0}^p |\beta_k|^2$  et  $c_p = 2\bar{\beta}_0 \beta_p$ . En déduire  $c_0 \geq 2|c_p|$ . [S]
  - (b) En considérant l'application  $g : x \mapsto M - f(x)$ , prouver  $M \geq 4|c_p|$ . [S]
  - (c) Montrer que  $M = 4|c_p| \Leftrightarrow |\beta_0| = |\beta_p|$  et  $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, \beta_k = 0$  [S]

## PARTIE IV : UNE PROPRIÉTÉ DE MINIMUM.

Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$ , on pose  $M(P) = \sup_{[-1,1]} |P(x)|$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{U}_n$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  qui sont unitaires de degré  $n$ .

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout  $P$  de  $\mathcal{U}_n$  on a  $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$  et de déterminer l'unique polynôme de  $\mathcal{U}_n$  pour lequel on a l'égalité.

On définit une suite  $(Q_n)$  de polynômes par 
$$\begin{cases} Q_0 = 2, & Q_1 = X \\ \forall n \geq 1, & Q_{n+1} = XQ_n - \frac{1}{4}Q_{n-1} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $Q_n$  est un élément de  $\mathcal{U}_n$ , à coefficients réels. [S]  
 (b) Prouver que pour tout réel  $t$ , et tout  $n \geq 1$ , on a :  $\cos nt = 2^{n-1}Q_n(\cos t)$ . [S]  
 (c) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , vérifier que  $M(Q_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ . [S]
2. Dans la suite de cette partie, on fixe  $n \geq 1$ . Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n\}$ , on note  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ .  
 On a bien entendu les inégalités  $x_0 = 1 > x_1 > \dots > x_k > \dots > x_{n-1} > x_n = -1$ .  
 (a) Calculer la valeur de  $Q_n$  en chacun des points  $x_k$ . [S]  
 (b) On se donne un polynôme  $P$  de  $\mathcal{U}_n$ , à coefficients réels. Montrer que  $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ .  
 Indication : raisonner par l'absurde et considérer le polynôme  $R = Q_n - P$ .  
 On montrera que  $R(x_k)$  a le signe de  $(-1)^k$ . [S]  
 (c) On se donne un polynôme  $P$  de  $\mathcal{U}_n$ , à coefficients réels ou complexes.  
 Montrer que  $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Indication : considérer le polynôme  $R$  dont les coefficients sont les parties réelles des coefficients de  $P$ . [S]
3. On se donne un polynôme  $A$  de  $\mathcal{U}_n$  tel que  $M(A) = \frac{1}{2^{n-1}}$ .  
 L'objectif de cette question est de montrer que  $A = Q_n$ .  
 (a) Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $Q(z) = 2^n z^n A\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$ .  
 Préciser le degré de  $Q$ , son coefficient dominant et son coefficient constant. [S]  
 (b) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $Q(e^{ix}) = 2^n e^{inx} A(\cos x)$ , puis  $\sup_{[0,2\pi]} |Q(e^{ix})| = 2$ . [S]  
 (c) En utilisant III-4, prouver que  $Q = X^{2n} + 1$ . [S]  
 (d) Montrer alors que  $A = Q_n$ . Conclusion? [S]