

Transformation de Laplace.

Partie I. Notations et définitions

Soit f une application définie sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{C} , et continue.

Pour tout réel p , on note f_p l'application définie sur \mathbb{R}^+ par $f_p(t) = e^{-pt}f(t)$.

On note $I(f)$ l'ensemble des réels p tels que l'application f_p soit bornée sur \mathbb{R}^+ .

1. (a) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir $I(f) = \emptyset$, ou au contraire $I(f) = \mathbb{R}$. [S]

(b) Dans cette question, on suppose que f est une application polynomiale non nulle.

Montrer que $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$ si f est non constante, et que $I(f) = \mathbb{R}^+$ sinon. [S]

2. Dans cette question, on suppose que $I(f)$ est non vide.

(a) Soit p dans $I(f)$, et soit $q > p$. Montrer que $\lim_{+\infty} f_q = 0$.

En déduire que l'intervalle $]p, +\infty[$ est inclus dans $I(f)$. [S]

(b) En déduire que $I(f)$ est un intervalle de l'un des types suivants :

$I(f) =]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ou $I(f) = [\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dira alors que α est l'abscisse de f . On la notera α_f ou $\alpha(f)$.

Remarque : d'après (1b), l'abscisse de toute fonction polynomiale est 0. [S]

(c) Soit A une fonction polynomiale non nulle sur \mathbb{R}^+ .

Montrer que l'application $g = Af$ a même abscisse que f . [S]

3. On note \mathcal{E} l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, continues et telles que $I(f) \neq \emptyset$.

Soit f dans \mathcal{E} . Montrer que si $p > \alpha_f$ l'application f_p est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Pour tout réel $p > \alpha_f$, on pose alors $\mathcal{L}(f)(p) = \int_{\mathbb{R}^+} f_p = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t) dt$.

On définit ainsi une application $\mathcal{L}(f)$ de $] \alpha_f, +\infty[$ dans \mathbb{C} .

On dit que $\mathcal{L}(f)$ est la *transformée de Laplace* de l'application f . [S]

Partie II. Premiers exemples

1. Dans cette question, on voit un premier exemple important de transformée de Laplace.

Soit ω un nombre complexe. Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^+ par $f(t) = e^{\omega t}$.

(a) Montrer que f est un élément de \mathcal{E} et que son abscisse est $\alpha_f = \operatorname{Re}(\omega)$. [S]

(b) Montrer que $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p - \omega}$ pour tout $p > \operatorname{Re}(\omega)$.

Pour exprimer ce résultat, on notera simplement $\mathcal{L}(e^{\omega t}) = \frac{1}{p - \omega}$, pour $p > \operatorname{Re}(\omega)$.

Si $\omega = 0$, on constate donc que $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$, pour $p > 0$. [S]

2. (a) Soient f, g dans \mathcal{E} . Soient λ, μ dans \mathbb{C} . On pose $h = \lambda f + \mu g$.

Montrer que h est dans \mathcal{E} et que $\mathcal{L}(h) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$ sur $] \max(\alpha_f, \alpha_g), +\infty[$. [S]

(b) On considère les quatre applications $\begin{cases} t \mapsto \sin t \\ t \mapsto \cos t \end{cases}, \begin{cases} t \mapsto \operatorname{sh} t \\ t \mapsto \operatorname{ch} t \end{cases}$, définies sur \mathbb{R}^+ .

Montrer que ces applications sont dans \mathcal{E} . Calculer leurs transformées de Laplace. [S]

Partie III. Régularité de la transformée de Laplace d'une application

Dans cette question, f est un élément de \mathcal{E} d'abscisse α_f .

On va vérifier certaines propriétés de l'application $F = \mathcal{L}(f)$ sur $I =]\alpha_f, +\infty[$.

1. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

Indication : utiliser un réel fixé $q > \alpha_f$, et se limiter à $p > q$. [S]

2. (a) Pour tout réel x , montrer que $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2 e^{|x|}}{2}$. [S]

- (b) Justifier l'existence sur I de $G_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} f(t) dt$, pour tout n de \mathbb{N}^* . [S]

- (c) On se donne les réels p_0, p, h tels que $\alpha_f < p_0 < p$ et $|h| \leq p - p_0$.

Montrer que $|F(p+h) - F(p) + hG_1(p)| \leq \frac{h^2}{2} K$, avec $K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-p_0 t} |f(t)| dt$. [S]

- (d) En déduire que F est dérivable sur I et que $\forall p \in I, F'(p) = -G_1(p)$.

On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}(f(t))$. [S]

3. (a) Montrer plus généralement que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et que, pour tout n de \mathbb{N} et tout p de I : $F^{(n)}(p) = (-1)^n G_n(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} f(t) dt$.

On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}(f(t))$. [S]

- (b) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$ est $p \mapsto \frac{n!}{p^{n+1}}$.

On exprime ce résultat en notant $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, pour $p > 0$. [S]

4. On va améliorer le résultat de (III.1), en prouvant que $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0)$.

Il en découle (quand $p \rightarrow +\infty$) $F(p) \sim \frac{f(0)}{p}$ si $f(0) \neq 0$ et $F(p) = o\left(\frac{1}{p}\right)$ si $f(0) = 0$.

On se donne un réel $\varepsilon > 0$, et un réel $a > 0$ tel que $0 \leq t \leq a \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$.

Enfin p désigne un réel quelconque strictement supérieur à 0 et à α_f .

- (a) Montrer que $|pF(p) - f(0)| \leq \varepsilon + pK_p$, avec $K_p = \int_a^{+\infty} e^{-pt} |f(t) - f(0)| dt$. [S]

- (b) On fixe un réel q tel que $q > \max(0, \alpha_f)$.

Justifier l'existence d'un réel M majorant $t \mapsto e^{-qt} |f(t) - f(0)|$ sur \mathbb{R}^+ .

En déduire l'inégalité $K_p \leq \frac{M}{p-q} e^{(q-p)a}$, valable pour tout $p > q$. [S]

- (c) Conclure. [S]

5. Dans cette question, on suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{C}$.

- (a) Prouver que l'abscisse de f est négative ou nulle. [S]

- (b) En s'inspirant de la méthode de la question (III.4), prouver que $\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \ell$. [S]

Partie IV. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Dans cette partie, f désigne un élément de \mathcal{E} . On note $F = \mathcal{L}(f)$.

1. Dans cette question, on étudie les transformées de Laplace des dérivées de f .

(a) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , et que f' est élément de \mathcal{E} .

Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$.

Noter que cela redonne (avec des hypothèses plus fortes) le résultat de (III.4). [S]

(b) On suppose maintenant que f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R}^+ .

On suppose également que les applications $f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont éléments de \mathcal{E} .

On note α le maximum des abscisses de $f, f', \dots, f^{(n)}$. Montrer que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (\text{pour tout } p > \alpha) \end{aligned}$$

En déduire un développement limité de $F(p)$ au voisinage de $+\infty$. [S]

2. On étudie ici la transformée de Laplace d'une primitive de f .

(a) On note g la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall t \geq 0, g(t) = \int_0^t f(u) du$.

Montrer que g est dans \mathcal{E} (utiliser $p > \max(\alpha_f, 0)$.)

Plus généralement, montrer que toute primitive de f sur \mathbb{R}^+ est dans \mathcal{E} . [S]

(b) Soit G la transformée de Laplace de l'application g .

Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $G(p) = \frac{F(p)}{p}$. [S]

3. Dans cette question, on suppose que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \ell \in \mathbb{C}$.

On définit alors l'application h sur \mathbb{R}^+ par $h(0) = \ell$ et : $\forall t > 0, h(t) = \frac{f(t)}{t}$.

(a) Montrer que l'application h est élément de \mathcal{E} , ayant la même abscisse que f . [S]

(b) Soit H la transformée de Laplace de h .

Montrer que, pour tout $p > \alpha$, on a : $H(p) = \int_p^{+\infty} F(q) dq$. [S]

(c) En déduire que, pour tout $p > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan p$. [S]

4. Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On note g l'application définie sur \mathbb{R}^+ par $g(t) = f(\lambda t)$.

(a) Montrer que g est dans \mathcal{E} et que son abscisse vérifie $\alpha_g = \lambda \alpha_f$. [S]

(b) Prouver que pour tout $p > \alpha_g$, on a $\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$. [S]

(c) Donner les transformées de Laplace de $\begin{cases} t \mapsto \sin(\lambda t) \\ t \mapsto \cos(\lambda t) \end{cases}, \begin{cases} t \mapsto \text{sh}(\lambda t) \\ t \mapsto \text{ch}(\lambda t) \end{cases}$ [S]

Partie V. Le produit de convolution

Soient f et g deux applications continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} .

Pour tout réel positif ou nul t , on pose $(f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$.

On dit que l'application $f \star g$ est le *produit de convolution* de f et de g .

1. Montrer que $f \star g = g \star f$. [S]

2. On se propose de montrer que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

(a) Montrer que pour tout t de \mathbb{R}^+ , on peut écrire : $(f \star g)(t) = t \int_0^1 f(vt)g(t-vt) dv$.

On pose $h(t) = \int_0^1 f(vt)g(t-vt) dv$, pour $t \geq 0$. [S]

(b) On se donne un réel $a > 0$. Les applications f et g étant continues sur \mathbb{R}^+ , elles sont bornées et uniformément continues sur $[0, a]$.

Montrer que l'application h est uniformément continue sur $[0, a]$ et conclure. [S]

3. Dans cette question, on note G la primitive de g qui s'annule à l'origine.

Pour tout $a \geq 0$, montrer que $\int_0^a (f \star g)(t) dt = (f \star G)(a)$.

On admettra au besoin la possibilité d'invertir les deux intégrales. [S]

4. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

(a) Dédurre de la question précédente que pour tout $a \geq 0$ on a l'encadrement :

$$\int_0^a (f \star g)(t) dt \leq \int_0^a f(t) dt \int_0^a g(t) dt \leq \int_0^{2a} (f \star g)(t) dt. \quad [S]$$

(b) On suppose que f, g sont intégrables sur \mathbb{R}^+ .

Montrer que $f \star g$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et que $\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]

5. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans \mathbb{C} .

(a) Pour tout réel $a \geq 0$, prouver la majoration suivante :

$$\left| \int_0^a f(t) dt \int_0^a g(t) dt - \int_0^a (f \star g)(t) dt \right| \leq \int_0^a |f(t)| dt \int_0^a |g(t)| dt - \int_0^a (|f| \star |g|)(t) dt \quad [S]$$

(b) On suppose que f, g sont intégrables sur \mathbb{R}^+ .

Montrer que $f \star g$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et que $\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]

6. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux éléments de \mathcal{E} .

(a) Pour toute application $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, on rappelle la notation $h_p : t \mapsto e^{-pt}h(t)$.

Pour tout réel p , montrer l'égalité $(f \star g)_p = f_p \star g_p$. [S]

(b) En déduire que $f \star g$ est un élément de \mathcal{E} et que $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

On vérifiera que l'abscisse de $f \star g$ est inférieure ou égale à $\max(\alpha_f, \alpha_g)$. [S]

Partie VI. Extension aux applications continues par morceaux.

Il est possible d'étendre ce qui vient d'être fait au cas des applications continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les résultats précédents se généralisent sans difficulté, à quelques modifications mineures près.

Dans ce qui suit, on modifie la définition de \mathcal{E} en l'étendant aux applications continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ , et en précisant que l'abscisse d'une application f de \mathcal{E} est la borne inférieure des p de \mathbb{R} tels que $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ soit intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Il sera commode de considérer que les éléments f de \mathcal{E} sont en fait définis sur \mathbb{R} mais sont identiquement nuls sur \mathbb{R}^{-*} .

Ainsi quand on écrit $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}$, l'application f est définie par $\begin{cases} f(t) = \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

Il est clair que si on modifie un élément f de \mathcal{E} en des points isolés (c'est-à-dire en un nombre fini de points sur chaque segment), alors l'application g obtenue est encore élément de \mathcal{E} , possède la même abscisse que f , et les deux applications f et g ont la même transformée de Laplace.

Voici les deux principales modifications à apporter à ce qui a déjà été vu :

– Le résultat de (III.4) devient : $\lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0+)$.

– Si f est de classe \mathcal{C}^n par morceaux sur \mathbb{R}^+ , et si $f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont dans \mathcal{E} , alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \dots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad (\text{pour tout } p > \alpha) \end{aligned}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ un élément de \mathcal{E} , et $\lambda > 0$. On note F la transformée de Laplace de f .

Soit g l'application définie par $g(t) = f(t - \lambda)$. En particulier $g(t) = 0$ si $t < \lambda$.

(a) Montrer que g est élément de \mathcal{E} , avec la même abscisse que f . [S]

(b) Montrer que la transformée de Laplace de g est $G : p \mapsto e^{-\lambda p}F(p)$.

On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(f(t - \lambda)) = e^{-\lambda p}\mathcal{L}(f)$. [S]

(c) En déduire $\mathcal{L}(f)$ si f est définie par : $f(t) = 1$ sur $[0, 1[$, et $f(t) = 0$ ailleurs. [S]

2. Soit f un élément de \mathcal{E} , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note F la transformée de Laplace de f .

Soit h l'application définie par $h(t) = e^{-\lambda t}f(t)$.

(a) Montrer que h est dans \mathcal{E} . Déterminer son abscisse en fonction de celle de f . [S]

(b) Montrer que la transformée de Laplace de h est $H : p \mapsto F(p + \lambda)$.

On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(e^{-\lambda t}f)(p) = \mathcal{L}(f)(p + \lambda)$. [S]

3. Soit f un élément de \mathcal{E} . On suppose que f est T -périodique, avec $T > 0$.

Soit \hat{f} l'application définie par $\hat{f}(t) = f(t)$ sur $[0, T[$ et $\hat{f}(t) = 0$ ailleurs.

Soit F la transformée de Laplace de f , et soit \hat{F} celle de \hat{f} .

(a) Montrer qu'on a l'égalité $F(p) = \frac{\hat{F}(p)}{1 - e^{-Tp}}$, pour tout $p > 0$. [S]

(b) En déduire $\mathcal{L}(f)$, si f est définie sur \mathbb{R}^+ par $f(t) = |\sin t|$. [S]

Corrigé du problème

Partie I. Notations et définitions

1. (a) – Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^+ par $f(t) = e^{t^2}$.
 Pour tout réel p , on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2 - pt} = +\infty$.
 Ainsi l'application f_p n'est jamais bornée sur \mathbb{R}^+ . Donc $I(f) = \emptyset$.
- Si on prend pour f l'application nulle, alors évidemment $I(f) = \mathbb{R}$.
 - Un exemple moins trivial est fourni par l'application $t \mapsto f(t) = e^{-t^2}$.
 En effet, pour tout réel p , on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2 - pt} = 0$.
 L'application f_p est continue sur \mathbb{R}^+ et elle a une limite finie en $+\infty$.
 On en déduit qu'elle est bornée sur \mathbb{R}^+ , et ceci pour tout réel p . Ainsi $I(f) = \mathbb{R}$.

[Q]

- (b) L'application f est évidemment continue sur \mathbb{R}^+ .
- Supposons que f soit une application constante $t \mapsto \lambda$, avec λ dans \mathbb{C}^* .
 Si $p \geq 0$, alors $|f_p(t)| = |\lambda| e^{-pt} \leq |\lambda|$ pour tout t de \mathbb{R}^+ .
 Si $p < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| e^{-pt} = +\infty$.
 Ainsi f_p est bornée sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $p \geq 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^+$.
 - Supposons que f soit de degré $n \geq 1$, de terme dominant λt^n , avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
 Quand t tend vers $+\infty$, on a l'équivalent $|f(t)| \sim |\lambda| t^n$.
 Si $p < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| t^n e^{-pt} = +\infty$.
 Ce résultat est encore vrai si $p = 0$.
 En revanche, si $p > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| t^n e^{-pt} = 0$.
 Ainsi f_p est bornée sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $p > 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$.

[Q]

2. (a) Soient p dans $I(f)$, et $q > p$. Il existe $M \geq 0$ tel que $|f_p(t)| \leq M$ sur \mathbb{R}^+ .
 Pour tout t de \mathbb{R}^+ , on a $f_q(t) = e^{(p-q)t} f_p(t)$ donc $|f_q(t)| \leq M e^{(p-q)t}$.
 f_q est continue et $\lim_{+\infty} f_q = 0$. Donc f_q est bornée sur \mathbb{R}^+ . Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$. [Q]
- (b) – Supposons que $I(f)$ ne soit pas une partie minorée de \mathbb{R} .
 Pour tout p de \mathbb{R} , il existe donc q dans $I(f)$ tel que $q < p$.
 On en déduit que $I(f)$ contient $]q, +\infty[$ donc contient $]p, +\infty[$.
 Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$ pour tout réel p . Il en découle $I(f) = \mathbb{R}$.
- Supposons que $I(f)$ soit minorée. Soit $\alpha = \inf I(f)$. On a déjà $I(f) \subset [\alpha, +\infty[$.
 Soit $p > \alpha$. Par définition de α , il existe q dans $] \alpha, p[$, avec $q \in I(f)$.