Transformation de Laplace.

Partie I. Notations et définitions

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et continue.
Pour tout réel p, on note f_p l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_p(t) = \mathrm{e}^{-pt} f(t)$.
On note $I(f)$ l'ensemble des réels p tels que l'application f_p soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1. (a) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir $I(f) = \emptyset$, ou au contraire $I(f) = \mathbb{R}$. [S]
   (b) Dans cette question, on suppose que f est une application polynomiale non nulle.
   Montrer que $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$ si f est non constante, et que $I(f) = \mathbb{R}^+$ sinon. [S]
2. Dans cette question, on suppose que $I(f)$ est non vide.
   (a) Soit p dans $I(f)$, et soit $q > p$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f_q = 0$.
   En déduire que l'intervalle $]p, +\infty[$ est inclus dans $I(f)$. [S]
   (b) En déduire que $I(f)$ est un intervalle de l'un des types suivants :
   $I(f) =]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ou $I(f) = [\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On dira alors que α est l'*abscisse* de f. On la notera α_f ou $\alpha(f)$.
   Remarque : d'après (1b), l'abscisse de toute fonction polynomiale est 0. [S]
   (c) Soit A une fonction polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que l'application $g = Af$ a même abscisse que f. [S]
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, continues et telles que $I(f) \neq \emptyset$.
   Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que si $p > \alpha_f$ l'application f_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout réel $p > \alpha_f$, on pose alors $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_p = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On définit ainsi une application $\mathcal{L}(f)$ de $]\alpha_f, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$.
   On dit que $\mathcal{L}(f)$ est la *transformée de Laplace* de l'application f. [S]

Partie II. Premiers exemples

1. Dans cette question, on voit un premier exemple important de transformée de Laplace.
   Soit ω un nombre complexe. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{\omega t}$.
   (a) Montrer que f est un élément de $\mathcal{E}$ et que son abscisse est $\alpha_f = \mathrm{Re}\,(\omega)$. [S]
   (b) Montrer que $L(f)(p) = \dfrac{1}{p-\omega}$ pour tout $p > \mathrm{Re}\,(\omega)$.
   Pour exprimer ce résultat, on notera simplement $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\omega t}) = \dfrac{1}{p-\omega}$, pour $p > \mathrm{Re}\,(\omega)$.
   Si $\omega = 0$, on constate donc que $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{p}$, pour $p > 0$. [S]
2. (a) Soient f, g dans $\mathcal{E}$. Soient λ, μ dans $\mathbb{C}$. On pose $h = \lambda f + \mu g$.
   Montrer que h est dans $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{L}(h) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$ sur $]\max(\alpha_f, \alpha_g), +\infty[$. [S]
   (b) On considère les quatre applications $\begin{cases} t \mapsto \sin t \\ t \mapsto \cos t \end{cases}$, $\begin{cases} t \mapsto \mathrm{sh}\, t \\ t \mapsto \mathrm{ch}\, t \end{cases}$, définies sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que ces applications sont dans $\mathcal{E}$. Calculer leurs transformées de Laplace. [S]

Partie III. Régularité de la transformée de Laplace d'une application

Dans cette question, f est un élément de $\mathcal{E}$ d'abscisse α_f.

On va vérifier certaines propriétés de l'application $F = \mathcal{L}(f)$ sur $I =]\alpha_f, +\infty[$.

1. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0$.

   Indication : utiliser un réel fixé $q > \alpha_f$, et se limiter à $p > q$. [S]

2. (a) Pour tout réel x, montrer que $|\,\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{|x|}}{2}$. [S]

   (b) Justifier l'existence sur I de $G_n(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]

   (c) On se donne les réels p_0, p, h tels que $\alpha_f < p_0 < p$ et $|h| \leq p - p_0$.

   Montrer que $|F(p+h) - F(p) + hG_1(p)| \leq \dfrac{h^2}{2} K$, avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-p_0 t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$. [S]

   (d) En déduire que F est dérivable sur I et que $\forall\, p \in I, F'(p) = -G_1(p)$.

   On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}(f(t))$. [S]

3. (a) Montrer plus généralement que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout p de I : $F^{(n)}(p) = (-1)^n G_n(p) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}(f(t))$. [S]

   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$ est $p \mapsto \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

   On exprime ce résultat en notant $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, pour $p > 0$. [S]

4. On va améliorer le résultat de (III.1), en prouvant que $\lim\limits_{p \to \infty} pF(p) = f(0)$.

   Il en découle (quand $p \to +\infty$) $F(p) \sim \frac{f(0)}{p}$ si $f(0) \neq 0$ et $F(p) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{p}\right)$ si $f(0) = 0$.

   On se donne un réel $\varepsilon > 0$, et un réel $a > 0$ tel que $0 \leq t \leq a \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$.

   Enfin p désigne un réel quelconque strictement supérieur à 0 et à α_f.

   (a) Montrer que $|pF(p) - f(0)| \leq \varepsilon + pK_p$, avec $K_p = \displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,|f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t$. [S]

   (b) On fixe un réel q tel que $q > \max(0, \alpha_f)$.

   Justifier l'existence d'un réel M majorant $t \mapsto \mathrm{e}^{-qt}\,|f(t) - f(0)|$ sur $\mathbb{R}^+$.
   En déduire l'inégalité $K_p \leq \frac{M}{p-q}\,\mathrm{e}^{(q-p)a}$, valable pour tout $p > q$. [S]

   (c) Conclure. [S]

5. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{C}$.

   (a) Prouver que l'abscisse de f est négative ou nulle. [S]

   (b) En s'inspirant de la méthode de la question (III.4), prouver que $\lim\limits_{p \to 0+} pF(p) = \ell$. [S]

Partie IV. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Dans cette partie, f désigne un élément de $\mathcal{E}$. On note $F = \mathcal{L}(f)$.

1. Dans cette question, on étudie les transformées de Laplace des dérivées de f.
   (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et que f' est élément de $\mathcal{E}$.
   Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$.
   Noter que cela redonne (avec des hypothèses plus fortes) le résultat de (III.4). [S]
   (b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$.
   On suppose également que les applications $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont éléments de $\mathcal{E}$.
   On note α le maximum des abscisses de $f, f', \ldots, f^{(n)}$. Montrer que :
   $$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = &\ p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (\text{pour tout } p > \alpha)\end{aligned}$$
   En déduire un développement limité de $F(p)$ au voisinage de $+\infty$. [S]
2. On étudie ici la transformée de Laplace d'une primitive de f.
   (a) On note g la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall t \geq 0,\ g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$.
   Montrer que g est dans $\mathcal{E}$ (utiliser $p > \max(\alpha_f, 0)$.)
   Plus généralement, montrer que toute primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est dans $\mathcal{E}$. [S]
   (b) Soit G la transformée de Laplace de l'application g.
   Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \ell \in \mathbb{C}$.
   On définit alors l'application h sur $\mathbb{R}^+$ par $h(0) = \ell$ et : $\forall t > 0,\ h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$.
   (a) Montrer que l'application h est élément de $\mathcal{E}$, ayant la même abscisse que f. [S]
   (b) Soit H la transformée de Laplace de h.
   Montrer que, pour tout $p > \alpha$, on a : $H(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$. [S]
   (c) En déduire que, pour tout $p > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan p$. [S]
4. Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On note g l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = f(\lambda t)$.
   (a) Montrer que g est dans $\mathcal{E}$ et que son abscisse vérifie $\alpha_g = \lambda\alpha_f$. [S]
   (b) Prouver que pour tout $p > \alpha_g$, on a $\mathcal{L}(g)(p) = \dfrac{1}{\lambda} F\Big(\dfrac{p}{\lambda}\Big)$. [S]
   (c) Donner les transformées de Laplace de $\begin{cases} t \mapsto \sin(\lambda t) \\ t \mapsto \cos(\lambda t)\end{cases}$, $\begin{cases} t \mapsto \operatorname{sh}(\lambda t) \\ t \mapsto \operatorname{ch}(\lambda t)\end{cases}$ [S]

Partie V. Le produit de convolution

Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout réel positif ou nul t, on pose $(f \star g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$.

On dit que l'application $f \star g$ est le *produit de convolution* de f et de g.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$. [S]
2. On se propose de montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on peut écrire : $(f \star g)(t) = t\displaystyle\int_0^1 f(vt)g(t-vt)\,\mathrm{d}v$.
   On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^1 f(vt)g(t-vt)\,\mathrm{d}v$, pour $t \geq 0$. [S]
   (b) On se donne un réel $a > 0$. Les applications f et g étant continues sur $\mathbb{R}^+$, elles sont bornées et uniformément continues sur $[0, a]$.
   Montrer que l'application h est uniformément continue sur $[0, a]$ et conclure. [S]
3. Dans cette question, on note G la primitive de g qui s'annule à l'origine.
   Pour tout $a \geq 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t = (f \star G)(a)$.
   On admettra au besoin la possibilité d'intervertir les deux intégrales. [S]
4. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   (a) Déduire de la question précédente que pour tout $a \geq 0$ on a l'encadrement :
   $$\int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2a} (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t.$$ [S]
   (b) On suppose que f, g sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]
5. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (a) Pour tout réel $a \geq 0$, prouver la majoration suivante :
   $$\left| \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \int_0^a |g(t)|\,\mathrm{d}t - \int_0^a (|f| \star |g|)(t)\,\mathrm{d}t$$ [S]
   (b) On suppose que f, g sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]
6. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}$.
   (a) Pour toute application $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, on rappelle la notation $h_p : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}h(t)$.
   Pour tout réel p, montrer l'égalité $(f \star g)_p = f_p \star g_p$. [S]
   (b) En déduire que $f \star g$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.
   On vérifiera que l'abscisse de $f \star g$ est inférieure ou égale à $\max(\alpha_f, \alpha_g)$. [S]

Partie VI. Extension aux applications continues par morceaux.

Il est possible d'étendre ce qui vient d'être fait au cas des applications continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats précédents se généralisent sans difficulté, à quelques modifications mineures près.

Dans ce qui suit, on modifie la définition de $\mathcal{E}$ en l'étendant aux applications continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, et en précisant que l'*abscisse* d'une application f de $\mathcal{E}$ est la borne inférieure des p de $\mathbb{R}$ tels que $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Il sera commode de considérer que les éléments f de $\mathcal{E}$ sont en fait définis sur $\mathbb{R}$ mais sont identiquement nuls sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Ainsi quand on écrit $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$, l'application f est définie par $\begin{cases} f(t) = \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

Il est clair que si on modifie un élément f de $\mathcal{E}$ en des points isolés (c'est-à-dire en un nombre fini de points sur chaque segment), alors l'application g obtenue est encore élément de $\mathcal{E}$, possède la même abscisse que f, et les deux applications f et g ont la même transformée de Laplace.

Voici les deux principales modifications à apporter à ce qui a déja été vu :

– Le résultat de (III.4) devient : $\lim\limits_{p\to\infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0+)$.
– Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, et si $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont dans $\mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)\\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad (\text{pour tout } p > \alpha)\end{aligned}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$, et $\lambda > 0$. On note F la transformée de Laplace de f.
   Soit g l'application définie par $g(t) = f(t-\lambda)$. En particulier $g(t) = 0$ si $t < \lambda$.
   (a) Montrer que g est élément de $\mathcal{E}$, avec la même abscisse que f. [S]
   (b) Montrer que la transformée de Laplace de g est $G : p \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda p} F(p)$.
   On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(f(t-\lambda)) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\mathcal{L}(f)$. [S]
   (c) En déduire $\mathcal{L}(f)$ si f est définie par : $f(t) = 1$ sur $[0, 1[$, et $f(t) = 0$ ailleurs. [S]
2. Soit f un élément de $\mathcal{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note F la transformée de Laplace de f.
   Soit h l'application définie par $h(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)$.
   (a) Montrer que h est dans $\mathcal{E}$. Déterminer son abscisse en fonction de celle de f. [S]
   (b) Montrer que la transformée de Laplace de h est $H : p \mapsto F(p+\lambda)$.
   On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-\lambda t} f)(p) = \mathcal{L}(f)(p+\lambda)$. [S]
3. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. On suppose que f est T-périodique, avec $T > 0$.
   Soit $\widehat{f}$ l'application définie par $\widehat{f}(t) = f(t)$ sur $[0, T[$ et $\widehat{f}(t) = 0$ ailleurs.
   Soit F la transformée de Laplace de f, et soit $\widehat{F}$ celle de $\widehat{f}$.
   (a) Montrer qu'on a l'égalité $F(p) = \dfrac{\widehat{F}(p)}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}$, pour tout $p > 0$. [S]
   (b) En déduire $\mathcal{L}(f)$, si f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = |\sin t|$. [S]

Corrigé du problème

Partie I. Notations et définitions

1. (a) – Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = e^{t^2}$.

Pour tout réel p, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_p(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2-pt} = +\infty$.

Ainsi l'application f_p n'est jamais bornée sur $\mathbb{R}^+$. Donc $I(f) = \emptyset$.

– Si on prend pour f l'application nulle, alors évidemment $I(f) = \mathbb{R}$.

– Un exemple moins trivial est fourni par l'application $t \mapsto f(t) = e^{-t^2}$.

En effet, pour tout réel p, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_p(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2-pt} = 0$.

L'application f_p est continue sur $\mathbb{R}^+$ et elle a une limite finie en $+\infty$.

On en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et ceci pour tout réel p. Ainsi $I(f) = \mathbb{R}$.

[Q]

(b) L'application f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^+$.

– Supposons que f soit une application constante $t \mapsto \lambda$, avec λ dans $\mathbb{C}^*$.

Si $p \geq 0$, alors $|f_p(t)| = |\lambda|\, e^{-pt} \leq |\lambda|$ pour tout t de $\mathbb{R}^+$.

Si $p < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\, e^{-pt} = +\infty$.

Ainsi f_p est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p \geq 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^+$.

– Supposons que f soit de degré $n \geq 1$, de terme dominant λt^n, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Quand t tend vers $+\infty$, on a l'équivalent $|f(t)| \sim |\lambda|\, t^n$.

Si $p < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\, t^n\, e^{-pt} = +\infty$.

Ce résultat est encore vrai si $p = 0$.

En revanche, si $p > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\, t^n\, e^{-pt} = 0$.

Ainsi f_p est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$.

[Q]

2. (a) Soient p dans $I(f)$, et $q > p$. Il existe $M \geq 0$ tel que $|f_p(t)| \leq M$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on a $f_q(t) = e^{(p-q)t} f_p(t)$ donc $|f_q(t)| \leq M\, e^{(p-q)t}$.

f_q est continue et $\lim\limits_{+\infty} f_q = 0$. Donc f_q est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$. [Q]

(b) – Supposons que $I(f)$ ne soit pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Pour tout p de $\mathbb{R}$, il existe donc q dans $I(f)$ tel que $q < p$.

On en déduit que $I(f)$ contient $]q, +\infty[$ donc contient $]p, +\infty[$.

Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$ pour tout réel p. Il en découle $I(f) = \mathbb{R}$.

– Supposons que $I(f)$ soit minorée. Soit $\alpha = \inf I(f)$. On a déjà $I(f) \subset [\alpha, +\infty[$.

Soit $p > \alpha$. Par définition de α, il existe q dans $]\alpha, p[$, avec $q \in I(f)$.