

## Polynômes de Legendre sur $[0,1]$ , quadratures de Gauss

On définit les suites de polynômes  $(U_n)$  et  $(P_n)$  de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \quad \forall n \geq 1, U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0, P_n = U_n^{(n)}$$

1. Quelques propriétés immédiates des polynômes  $P_n$

(a) Expliciter les polynômes  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . [S]

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , montrer que  $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$ .

Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de  $P_n$ ? [S]

(c) Montrer que  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$ , à coefficients entiers relatifs.

Préciser les coefficients dominant et constant de  $P_n$ , ainsi que  $P_n(1)$ . [S]

2. Deux relations vérifiées par les polynômes  $P_n$ .

(a) Vérifier la relation  $(X^2 - X)U'_n = n(2X - 1)U_n$ .

En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $(X^2 - X)P''_n + (2X - 1)P'_n - n(n+1)P_n = 0$ . [S]

(b) Vérifier les relations  $U'_{n+1} = (2X - 1)U_n$  et  $U''_{n+1} = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$ .

En dérivant  $n$  fois la première et  $n - 1$  fois la seconde, prouver que :

$$[S] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

3. Propriété intégrale des polynômes  $P_n$ .

(a) Soit  $n$  un entier naturel, et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^n$ .

En intégrant par parties, montrer que  $\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t)f(t) dt$ .

En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \int_0^1 P_n(t)Q(t) dt = 0$ . [S]

(b) Par des intégrations par parties, calculer  $\int_0^1 t^n(t-1)^m dt$ , avec  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ .

En déduire que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $\int_0^1 U_n(t) dt = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$  [S]

(c) Prouver que pour tous entiers  $m$  et  $n$  :

$$[S] \quad \int_0^1 P_n(t)P_m(t) dt = 0 \text{ si } m \neq n, \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_n^2(t) dt = \frac{1}{2n+1}.$$

4. Propriété génératrice des polynômes  $P_n$ .

(a) Pour tout  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , montrer qu'il existe des réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que  $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k$ .

Indication : raisonner par récurrence sur  $n$  [S].

(b) Avec ces notations, montrer que  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\lambda_k = (2k + 1) \int_0^1 P(t)P_k(t) dt$  [S]

5. Racines des polynômes  $P_n$ .

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme  $P_n$  possède  $n$  racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle  $]0, 1[$ .

(a) *Première méthode* : Soit  $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_p\}$  l'ensemble éventuellement vide des racines de  $P_n$  dans  $]0, 1[$  et qui ont une multiplicité impaire, avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ .

Supposer  $p < n$  et utiliser (3a) avec  $Q = \prod_{k=1}^p (X - x_k)$  (et  $Q = 1$  si  $\mathcal{S} = \emptyset$ ). [S]

(b) *Seconde méthode* : Revenir à la définition de  $P_n$  utiliser le théorème de Rolle. [S]

6. Minoration de  $P_n$  pour  $x \notin [0, 1]$

Dans la suite de ce problème,  $n$  est fixé et strictement positif.

On note  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les racines de  $P_n$ , rangées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  on a  $x_{n+1-k} = 1 - x_k$ .

En déduire que  $P_n^2 = (C_{2n}^n)^2 \prod_{k=1}^n (x(x-1) + x_k(1-x_k))$ . [S]

(b) Prouver l'inégalité  $C_{2n}^n \geq \frac{4^n}{2n+1}$ .

En déduire que si  $x \leq 0$  ou  $x \geq 1$  alors  $|P_n(x)| \geq \frac{1}{2n+1} \left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n$ . [S]

7. Interpolation polynomiale

(a) Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_k$  tel que :

$$\deg(L_k) \leq n-1 \quad L_k(x_k) = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}, L_k(x_j) = 0$$

On donnera l'expression factorisée du polynôme  $L_k$ . [S]

(b) Montrer que pour tout  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a  $P = \sum_{k=1}^n P(x_k)L_k$ . [S]

(c) Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on pose  $\ell_k = \int_0^1 L_k(t) dt$ .

Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ . Prouver l'égalité  $\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n \ell_k P(x_k)$ .

Indication : utiliser la division de  $P$  par  $P_n$ , ainsi que les questions (3b) et (7b). [S]

(d) Pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , prouver que  $\ell_j > 0$ .

Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme  $P = L_j^2$ . [S]



## 8. Quadratures de Gauss

On reprend les notations de la question précédente.

On considère l'approximation  $\int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n \ell_k f(x_k)$ , où  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

On sait que cette approximation est en fait une égalité si  $f$  est un polynôme de degré  $\leq 2n - 1$ .

On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{2n}$ .

- (a) Montrer que :  $\exists ! P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$  tel que :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

Indication : poser  $P = QP_n + R$  avec  $Q, R$  dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Utiliser (7b). [S]

- (b) Pour tout  $t$  de  $]0, 1[$ , montrer qu'il existe  $c$  dans  $]0, 1[$  tel que  $f(t) - P(t) = \frac{n!^4 f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$ .

Indication : si  $t \notin \{x_1, \dots, x_n\}$  utiliser  $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$  avec  $\varphi(t) = 0$ . [S]

- (c) On note  $M_{2n}$  la borne supérieure de  $|f^{(2n)}|$  sur  $[0, 1]$ .

Déduire de ce qui précède que  $\left| \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \ell_k f(x_k) \right| \leq \frac{M_{2n} (n!)^4}{(2n)!^3 (2n+1)}$  [S]

- (d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si  $n = 5$ ? [S]

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand  $n = 5$ . [S]

## Corrigé du problème

### 1. Quelques propriétés immédiates des polynômes $P_n$

(a) On trouve successivement :

$$\diamond U_0 = 1 \text{ donc } P_0 = U_0^{(0)} = U_0 = 1.$$

$$\diamond U_1 = X^2 - X \text{ donc } P_1 = U_1' = 2X - 1.$$

$$\diamond U_2 = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2) \text{ donc } P_2 = 6X^2 - 6X + 1.$$

$$\diamond U_3 = \frac{1}{6}(X^6 - 3X^5 + 3X^4 - X^3) \text{ donc } P_3 = 20X^3 - 30X^2 + 12X - 1. \quad [\text{Q}]$$

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n(1 - X) = \frac{1}{n!}(1 - X)^n(-X)^n = \frac{1}{n!}(X - 1)^n X^n = U_n(X)$ .

Si on dérive  $n$  fois, on trouve  $(-1)^n U_n^{(n)}(1 - X) = U_n^{(n)}(X)$ .

Autrement dit, pour tout entier  $n$ , on a  $P_n(1 - X) = (-1)^n P_n(X)$ .

On en déduit que la courbe représentative de  $P_n$  est :

$\diamond$  symétrique par rapport à l'axe  $x = \frac{1}{2}$  si  $n$  est pair.

$\diamond$  symétrique par rapport au point  $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$  si  $n$  est impair.  $[\text{Q}]$

(c) Par définition,  $U_n$  est un polynôme de degré  $2n$ .

Le polynôme  $P_n$ , qui en est la dérivée  $n$ -ième, est donc de degré  $n$ .

Pour tout entier  $n$ , on obtient en utilisant la formule du binôme :

$$U_n = \frac{1}{n!} X^n (X - 1)^n = \frac{1}{n!} X^n \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} X^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} X^{k+n}$$

On dérive  $n$  fois et on obtient l'expression développée de  $P_n$  :

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(k+n)!}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k C_{n+k}^n X^k$$

Cette expression montre que  $P_n$  s'écrit  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , où les  $a_k$  sont dans  $\mathbb{Z}$ .

Le coefficient dominant est  $a_n = (-1)^0 C_n^n C_{2n}^n = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .

Le coefficient constant de  $P_n$  est  $P(0) = a_0 = (-1)^n C_n^0 C_n^n = (-1)^n$ .

Enfin, la question (1b) donne :  $P_n(1) = (-1)^n P_n(0) = 1$ .  $[\text{Q}]$

### 2. Deux relations vérifiées par les polynômes $P_n$ .

(a) Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $U_n = \frac{(X^2 - X)^n}{n!}$ , donc  $U_n' = (2X - 1) \frac{(X^2 - X)^{n-1}}{(n-1)!}$ .

On en déduit  $(X^2 - X)U_n' = n(2X - 1) \frac{(X^2 - X)^n}{n!} = n(2X - 1)U_n$ .

Enfin, cette égalité est vérifiée de façon évidente si  $n = 0$ .

On dérive  $n + 1$  fois avec la formule de Leibniz. On trouve :

$$(X^2 - X)U_n^{(n+2)} + C_{n+1}^1 (2X - 1)U_n^{(n+1)} + 2C_{n+1}^2 U_n^{(n)} = n(2X - 1)U_n^{(n+1)} + 2nC_{n+1}^1 U_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2 - X)P_n'' + (n + 1)(2X - 1)P_n' + n(n + 1)P_n = n(2X - 1)P_n' + 2n(n + 1)P_n$$

$$\text{Finalement, on a obtenu : } (X^2 - X)P_n'' + (2X - 1)P_n' - n(n + 1)P_n = 0 \quad [Q]$$

(b) On a  $U_{n+1} = \frac{(X^2 - X)^{n+1}}{(n+1)!}$ , donc  $U_{n+1}' = (2X - 1) \frac{(X^2 - X)^n}{n!} = (2X - 1)U_n$ .

Si on dérive cette égalité, on trouve :  $U_{n+1}'' = 2U_n + (2X - 1)U_n'$ .

Si  $n \geq 1$ , on a  $U_n' = (2X - 1)U_{n-1}$  donc  $U_{n+1}'' = 2U_n + (2X - 1)^2 U_{n-1}$ .

Par ailleurs  $(2X - 1)^2 U_{n-1} = 4(X^2 - X)U_{n-1} + U_{n-1} = 4nU_n + U_{n-1}$ .

On a donc obtenu l'égalité  $U_{n+1}'' = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$ , pour tout  $n \geq 1$ .

– Si on dérive  $n$  fois  $U_{n+1}' = (2X - 1)U_n$  on trouve  $U_{n+1}^{(n+1)} = (2X - 1)U_n^{(n)} + 2nU_n^{(n-1)}$ .

Autrement dit :  $P_{n+1} = (2X - 1)P_n + 2nU_n^{(n-1)}$ .

– On dérive maintenant  $n - 1$  fois la relation  $U_{n+1}'' = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$ .

On trouve  $U_{n+1}^{(n+1)} = 2(2n + 1)U_n^{(n-1)} + U_{n-1}^{(n-1)}$ .

Autrement dit  $P_{n+1} = P_{n-1} + 2(2n + 1)U_n^{(n-1)}$ .

– Il suffit d'éliminer  $U_n^{(n-1)}$  entre les deux égalités obtenues.

On trouve :  $((2n + 1) - n)P_{n+1} = (2n + 1)(2X - 1)P_n - nP_{n-1}$ .

On a donc obtenu :  $\forall n \geq 1, (n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)(2X - 1)P_n + nP_{n-1} = 0$ . [Q]

### 3. Propriété intégrale des polynômes $P_n$ .

(a) On utilise la formule d'intégration par parties répétées :

$$\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k U_n^{(k)}(t)f^{(n-k-1)}(t) \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t) dt$$

Par définition, les réels 0 et 1 sont des racines de multiplicité  $n$  de  $U_n$ .

On en déduit que  $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$  pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n-1\}$ .

Il en découle l'égalité  $\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t)f(t) dt$ .

Si  $Q$  appartient à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  on applique ce qui précède à  $f = Q$ .

Puisque  $Q^{(n)} = 0$ , on obtient  $\int_0^1 P_n(t)Q(t) dt = (-1)^n \int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t) dt = 0$ . [Q]

(b) Posons  $I_{n,m} = \int_0^1 t^n (t - 1)^m dt$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

En intégrant par parties, on trouve, si  $m \geq 1$  :

$$I_{n,m} = \frac{1}{n+1} \left[ t^{n+1} (t-1)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (t-1)^{m-1} dt = -\frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$$