

Polynômes de Legendre sur $[0,1]$, quadratures de Gauss

On définit les suites de polynômes (U_n) et (P_n) de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \quad \forall n \geq 1, U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0, P_n = U_n^{(n)}$$

1. Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n

(a) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 . [S]

(b) Pour tout n de \mathbb{N} , montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de P_n ? [S]

(c) Montrer que P_n est un polynôme de degré n , à coefficients entiers relatifs.

Préciser les coefficients dominant et constant de P_n , ainsi que $P_n(1)$. [S]

2. Deux relations vérifiées par les polynômes P_n .

(a) Vérifier la relation $(X^2 - X)U'_n = n(2X - 1)U_n$.

En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $(X^2 - X)P''_n + (2X - 1)P'_n - n(n+1)P_n = 0$. [S]

(b) Vérifier les relations $U'_{n+1} = (2X - 1)U_n$ et $U''_{n+1} = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$.

En dérivant n fois la première et $n - 1$ fois la seconde, prouver que :

$$[S] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

3. Propriété intégrale des polynômes P_n .

(a) Soit n un entier naturel, et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^n .

En intégrant par parties, montrer que $\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t)f(t) dt$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \int_0^1 P_n(t)Q(t) dt = 0$. [S]

(b) Par des intégrations par parties, calculer $\int_0^1 t^n(t-1)^m dt$, avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

En déduire que pour tout entier n de \mathbb{N} , on a $\int_0^1 U_n(t) dt = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$ [S]

(c) Prouver que pour tous entiers m et n :

$$[S] \quad \int_0^1 P_n(t)P_m(t) dt = 0 \text{ si } m \neq n, \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_n^2(t) dt = \frac{1}{2n+1}.$$

4. Propriété génératrice des polynômes P_n .

(a) Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k$.

Indication : raisonner par récurrence sur n [S].



(b) Avec ces notations, montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\lambda_k = (2k + 1) \int_0^1 P(t)P_k(t) dt$ [S]

5. Racines des polynômes P_n .

Soit n dans \mathbb{N}^* . Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$.

(a) *Première méthode* : Soit $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0, 1[$ et qui ont une multiplicité impaire, avec $x_1 < x_2 < \dots < x_p$.

Supposer $p < n$ et utiliser (3a) avec $Q = \prod_{k=1}^p (X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $\mathcal{S} = \emptyset$). [S]

(b) *Seconde méthode* : Revenir à la définition de P_n utiliser le théorème de Rolle. [S]

6. Minoration de P_n pour $x \notin [0, 1]$

Dans la suite de ce problème, n est fixé et strictement positif.

On note x_1, x_2, \dots, x_n les racines de P_n , rangées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que pour tout k de $\{1, \dots, n\}$ on a $x_{n+1-k} = 1 - x_k$.

En déduire que $P_n^2 = (C_{2n}^n)^2 \prod_{k=1}^n (x(x-1) + x_k(1-x_k))$. [S]

(b) Prouver l'inégalité $C_{2n}^n \geq \frac{4^n}{2n+1}$.

En déduire que si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ alors $|P_n(x)| \geq \frac{1}{2n+1} \left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n$. [S]

7. Interpolation polynomiale

(a) Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme L_k tel que :

$$\deg(L_k) \leq n-1 \quad L_k(x_k) = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}, L_k(x_j) = 0$$

On donnera l'expression factorisée du polynôme L_k . [S]

(b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum_{k=1}^n P(x_k)L_k$. [S]

(c) Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on pose $\ell_k = \int_0^1 L_k(t) dt$.

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Prouver l'égalité $\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n \ell_k P(x_k)$.

Indication : utiliser la division de P par P_n , ainsi que les questions (3b) et (7b). [S]

(d) Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, prouver que $\ell_j > 0$.

Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme $P = L_j^2$. [S]



8. Quadratures de Gauss

On reprend les notations de la question précédente.

On considère l'approximation $\int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n \ell_k f(x_k)$, où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

On sait que cette approximation est en fait une égalité si f est un polynôme de degré $\leq 2n - 1$.

On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand f est de classe \mathcal{C}^{2n} .

- (a) Montrer que : $\exists ! P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

Indication : poser $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Utiliser (7b). [S]

- (b) Pour tout t de $[0, 1]$, montrer qu'il existe c dans $]0, 1[$ tel que $f(t) - P(t) = \frac{n!^4 f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$.

Indication : si $t \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ utiliser $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$ avec $\varphi(t) = 0$. [S]

- (c) On note M_{2n} la borne supérieure de $|f^{(2n)}|$ sur $[0, 1]$.

Déduire de ce qui précède que $\left| \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \ell_k f(x_k) \right| \leq \frac{M_{2n} (n!)^4}{(2n)!^3 (2n+1)}$ [S]

- (d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si $n = 5$? [S]

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand $n = 5$. [S]

Corrigé du problème

1. Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n

(a) On trouve successivement :

$$\diamond U_0 = 1 \text{ donc } P_0 = U_0^{(0)} = U_0 = 1.$$

$$\diamond U_1 = X^2 - X \text{ donc } P_1 = U_1' = 2X - 1.$$

$$\diamond U_2 = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2) \text{ donc } P_2 = 6X^2 - 6X + 1.$$

$$\diamond U_3 = \frac{1}{6}(X^6 - 3X^5 + 3X^4 - X^3) \text{ donc } P_3 = 20X^3 - 30X^2 + 12X - 1. \quad [\text{Q}]$$

(b) Pour tout n de \mathbb{N} , $U_n(1 - X) = \frac{1}{n!}(1 - X)^n(-X)^n = \frac{1}{n!}(X - 1)^n X^n = U_n(X)$.

Si on dérive n fois, on trouve $(-1)^n U_n^{(n)}(1 - X) = U_n^{(n)}(X)$.

Autrement dit, pour tout entier n , on a $P_n(1 - X) = (-1)^n P_n(X)$.

On en déduit que la courbe représentative de P_n est :

\diamond symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ si n est pair.

\diamond symétrique par rapport au point $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$ si n est impair. $[\text{Q}]$

(c) Par définition, U_n est un polynôme de degré $2n$.

Le polynôme P_n , qui en est la dérivée n -ième, est donc de degré n .

Pour tout entier n , on obtient en utilisant la formule du binôme :

$$U_n = \frac{1}{n!} X^n (X - 1)^n = \frac{1}{n!} X^n \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} X^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} X^{k+n}$$

On dérive n fois et on obtient l'expression développée de P_n :

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(k+n)!}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k C_{n+k}^n X^k$$

Cette expression montre que P_n s'écrit $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, où les a_k sont dans \mathbb{Z} .

Le coefficient dominant est $a_n = (-1)^0 C_n^n C_{2n}^n = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Le coefficient constant de P_n est $P(0) = a_0 = (-1)^n C_n^0 C_n^n = (-1)^n$.

Enfin, la question (1b) donne : $P_n(1) = (-1)^n P_n(0) = 1$. $[\text{Q}]$

2. Deux relations vérifiées par les polynômes P_n .

(a) Pour tout $n \geq 1$, on a $U_n = \frac{(X^2 - X)^n}{n!}$, donc $U_n' = (2X - 1) \frac{(X^2 - X)^{n-1}}{(n-1)!}$.

On en déduit $(X^2 - X)U_n' = n(2X - 1) \frac{(X^2 - X)^n}{n!} = n(2X - 1)U_n$.

Enfin, cette égalité est vérifiée de façon évidente si $n = 0$.

On dérive $n + 1$ fois avec la formule de Leibniz. On trouve :

$$(X^2 - X)U_n^{(n+2)} + C_{n+1}^1 (2X - 1)U_n^{(n+1)} + 2C_{n+1}^2 U_n^{(n)} = n(2X - 1)U_n^{(n+1)} + 2nC_{n+1}^1 U_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2 - X)P_n'' + (n + 1)(2X - 1)P_n' + n(n + 1)P_n = n(2X - 1)P_n' + 2n(n + 1)P_n$$

$$\text{Finalement, on a obtenu : } (X^2 - X)P_n'' + (2X - 1)P_n' - n(n + 1)P_n = 0 \quad [\text{Q}]$$

(b) On a $U_{n+1} = \frac{(X^2 - X)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $U_{n+1}' = (2X - 1) \frac{(X^2 - X)^n}{n!} = (2X - 1)U_n$.

Si on dérive cette égalité, on trouve : $U_{n+1}'' = 2U_n + (2X - 1)U_n'$.

Si $n \geq 1$, on a $U_n' = (2X - 1)U_{n-1}$ donc $U_{n+1}'' = 2U_n + (2X - 1)^2 U_{n-1}$.

Par ailleurs $(2X - 1)^2 U_{n-1} = 4(X^2 - X)U_{n-1} + U_{n-1} = 4nU_n + U_{n-1}$.

On a donc obtenu l'égalité $U_{n+1}'' = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.

– Si on dérive n fois $U_{n+1}' = (2X - 1)U_n$ on trouve $U_{n+1}^{(n+1)} = (2X - 1)U_n^{(n)} + 2nU_n^{(n-1)}$.

Autrement dit : $P_{n+1} = (2X - 1)P_n + 2nU_n^{(n-1)}$.

– On dérive maintenant $n - 1$ fois la relation $U_{n+1}'' = 2(2n + 1)U_n + U_{n-1}$.

On trouve $U_{n+1}^{(n+1)} = 2(2n + 1)U_n^{(n-1)} + U_{n-1}^{(n-1)}$.

Autrement dit $P_{n+1} = P_{n-1} + 2(2n + 1)U_n^{(n-1)}$.

– Il suffit d'éliminer $U_n^{(n-1)}$ entre les deux égalités obtenues.

On trouve : $((2n + 1) - n)P_{n+1} = (2n + 1)(2X - 1)P_n - nP_{n-1}$.

On a donc obtenu : $\forall n \geq 1, (n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)(2X - 1)P_n + nP_{n-1} = 0$. [Q]

3. Propriété intégrale des polynômes P_n .

(a) On utilise la formule d'intégration par parties répétées :

$$\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k U_n^{(k)}(t)f^{(n-k-1)}(t) \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t) dt$$

Par définition, les réels 0 et 1 sont des racines de multiplicité n de U_n .

On en déduit que $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout k de $\{0, \dots, n-1\}$.

Il en découle l'égalité $\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t)f(t) dt$.

Si Q appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on applique ce qui précède à $f = Q$.

Puisque $Q^{(n)} = 0$, on obtient $\int_0^1 P_n(t)Q(t) dt = (-1)^n \int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t) dt = 0$. [Q]

(b) Posons $I_{n,m} = \int_0^1 t^n (t - 1)^m dt$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on trouve, si $m \geq 1$:

$$I_{n,m} = \frac{1}{n+1} \left[t^{n+1} (t-1)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (t-1)^{m-1} dt = -\frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$$