Polynômes de Legendre sur [0,1], quadratures de Gauss

On définit les suites de polynômes (U_n) et (P_n) de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \qquad \forall\, n \geq 1,\ U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \qquad \forall\, n \geq 0,\ P_n = U_n^{(n)}$$

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*

   (a) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3. [S]

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de P_n ? [S]

   (c) Montrer que P_n est un polynôme de degré n, à coefficients entiers relatifs.
   Préciser les coefficients dominant et constant de P_n, ainsi que $P_n(1)$. [S]

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*

   (a) Vérifier la relation $(X^2-X)U_n' = n(2X-1)U_n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(X^2-X)P_n'' + (2X-1)P_n' - n(n+1)P_n = 0$. [S]

   (b) Vérifier les relations $U_{n+1}' = (2X-1)U_n$ et $U_{n+1}'' = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.
   En dérivant n fois la première et $n-1$ fois la seconde, prouver que :
   [S] $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$

3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*

   (a) Soit n un entier naturel, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
   En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$. [S]

   (b) Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$ [S]

   (c) Prouver que pour tous entiers m et n :
   [S] $\qquad \displaystyle\int_0^1 P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $m \neq n$, et $\displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$.

4. *Propriété génératrice des polynômes P_n.*

   (a) Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.
   Indication : raisonner par récurrence sur n [S].

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

(b) Avec ces notations, montrer que $\forall\, k \in \{0,\dots,n\},\ \lambda_k = (2k+1)\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t$ [S]

5. *Racines des polynômes P_n.*

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle $]0,1[$.

(a) *Première méthode :* Soit $\mathcal{S} = \{x_1,\dots,x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0,1[$ et qui ont une multiplicité impaire, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
Supposer $p < n$ et utiliser (3a) avec $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $\mathcal{S} = \emptyset$.) [S]

(b) *Seconde méthode :* Revenir à la définition de P_n utiliser le théorème de Rolle. [S]

6. *Minoration de P_n pour $x \notin [0,1]$*

Dans la suite de ce problème, n est fixé et strictement positif.

On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de P_n, rangées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que pour tout k de $\{1,\dots,n\}$ on a $x_{n+1-k} = 1 - x_k$.
En déduire que $P_n^2 = (\mathrm{C}_{2n}^n)^2 \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x(x-1) + x_k(1-x_k))$. [S]

(b) Prouver l'inégalité $\mathrm{C}_{2n}^n \geq \frac{4^n}{2n+1}$.
En déduire que si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ alors $|P_n(x)| \geq \frac{1}{2n+1}\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n$. [S]

7. *Interpolation polynomiale*

(a) Pour tout k de $\{1,\dots,n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme L_k tel que :

$$\deg(L_k) \leq n-1 \qquad L_k(x_k) = 1 \qquad \forall\, j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\},\ L_k(x_j) = 0$$

On donnera l'expression factorisée du polynôme L_k. [S]

(b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(x_k)L_k$. [S]

(c) Pour tout k de $\{1,\dots,n\}$, on pose $\ell_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k)$.
Indication : utiliser la division de P par P_n, ainsi que les questions (3b) et (7b). [S]

(d) Pour tout j de $\{1,\dots,n\}$, prouver que $\ell_j > 0$.
Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme $P = L_j^2$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

8. *Quadratures de Gauss*

On reprend les notations de la question précédente.

On considère l'approximation $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)$, où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

On sait que cette approximation est en fait une égalité si f est un polynôme de degré $\leq 2n-1$.

On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$.

(a) Montrer que : $\exists ! P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall\, k \in \{1,\dots,n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

Indication : poser $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Utiliser (7b). [S]

(b) Pour tout t de $[0,1]$, montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{n!^4\, f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$.

Indication : si $t \notin \{x_1,\dots,x_n\}$ utiliser $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$ avec $\varphi(t) = 0$. [S]

(c) On note M_{2n} la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0,1]$.

Déduire de ce qui précède que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)\right| \leq \dfrac{M_{2n}\,(n!)^4}{(2n)!^3\,(2n+1)}$ [S]

(d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si $n = 5$? [S]

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand $n = 5$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Corrigé du problème

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*

   (a) On trouve sucessivement :

   ◇ $U_0 = 1$ donc $P_0 = U_0^{(0)} = U_0 = 1$.

   ◇ $U_1 = X^2 - X$ donc $P_1 = U_1' = 2X - 1$.

   ◇ $U_2 = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2)$ donc $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.

   ◇ $U_3 = \frac{1}{6}(X^6 - 3X^5 + 3X^4 - X^3)$ donc $P_3 = 20X^3 - 30X^2 + 12X - 1$. [Q]

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n(1-X) = \frac{1}{n!}(1-X)^n(-X)^n = \frac{1}{n!}(X-1)^n X^n = U_n(X)$.

   Si on dérive n fois, on trouve $(-1)^n U_n^{(n)}(1-X) = U_n^{(n)}(X)$.

   Autrement dit, pour tout entier n, on a $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

   On en déduit que la courbe représentative de P_n est :

   ◇ symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ si n est pair.

   ◇ symétrique par rapport au point $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$ si n est impair. [Q]

   (c) Par définition, U_n est un polynôme de degré $2n$.

   Le polynôme P_n, qui en est la dérivée n-ième, est donc de degré n.

   Pour tout entier n, on obtient en utilisant la formule du binôme :

   $$U_n = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n = \frac{1}{n!}X^n \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} X^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} X^{k+n}$$

   On dérive n fois et on obtient l'expression développée de P_n :

   $$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} \frac{(k+n)!}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \mathrm{C}_n^k \, \mathrm{C}_{n+k}^n \, X^k$$

   Cette expression montre que P_n s'écrit $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbb{Z}$.

   Le coefficient dominant est $a_n = (-1)^0 \mathrm{C}_n^n \, \mathrm{C}_{2n}^n = \mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

   Le coefficient constant de P_n est $P(0) = a_0 = (-1)^n \mathrm{C}_n^0 \, \mathrm{C}_n^n = (-1)^n$.

   Enfin, la question (1b) donne : $P_n(1) = (-1)^n P_n(0) = 1$. [Q]

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*

   (a) Pour tout $n \geq 1$, on a $U_n = \frac{(X^2-X)^n}{n!}$, donc $U_n' = (2X-1)\frac{(X^2-X)^{n-1}}{(n-1)!}$.

   On en déduit $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)\frac{(X^2-X)^n}{n!} = n(2X-1)U_n$.

   Enfin, cette égalité est vérifiée de façon évidente si $n = 0$.

   On dérive $n+1$ fois avec la formule de Leibniz. On trouve :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

$(X^2-X)U_n^{(n+2)}+\mathrm{C}_{n+1}^1(2X-1)U_n^{(n+1)}+2\mathrm{C}_{n+1}^2U_n^{(n)}=n(2X-1)U_n^{(n+1)}+2n\mathrm{C}_{n+1}^1U_n^{(n)}$

Autrement dit

$(X^2-X)P_n''+(n+1)(2X-1)P_n'+n(n+1)P_n=n(2X-1)P_n'+2n(n+1)P_n$

Finalement, on a obtenu : $(X^2-X)P_n''+(2X-1)P_n'-n(n+1)P_n=0$ [Q]

(b) On a $U_{n+1}=\dfrac{(X^2-X)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $U_{n+1}'=(2X-1)\dfrac{(X^2-X)^n}{n!}=(2X-1)U_n$.

Si on dérive cette égalité, on trouve : $U_{n+1}''=2U_n+(2X-1)U_n'$.

Si $n\geq 1$, on a $U_n'=(2X-1)U_{n-1}$ donc $U_{n+1}''=2U_n+(2X-1)^2U_{n-1}$.

Par ailleurs $(2X-1)^2U_{n-1}=4(X^2-X)U_{n-1}+U_{n-1}=4nU_n+U_{n-1}$.

On a donc obtenu l'égalité $U_{n+1}''=2(2n+1)U_n+U_{n-1}$, pour tout $n\geq 1$.

– Si on dérive n fois $U_{n+1}'=(2X-1)U_n$ on trouve $U_{n+1}^{(n+1)}=(2X-1)U_n^{(n)}+2nU_n^{(n-1)}$.

Autrement dit : $P_{n+1}=(2X-1)P_n+2nU_n^{(n-1)}$.

– On dérive maintenant $n-1$ fois la relation $U_{n+1}''=2(2n+1)U_n+U_{n-1}$.

On trouve $U_{n+1}^{(n+1)}=2(2n+1)U_n^{(n-1)}+U_{n-1}^{(n-1)}$.

Autrement dit $P_{n+1}=P_{n-1}+2(2n+1)U_n^{(n-1)}$.

– Il suffit d'éliminer $U_n^{(n-1)}$ entre les deux égalités obtenues.

On trouve : $((2n+1)-n)P_{n+1}=(2n+1)(2X-1)P_n-nP_{n-1}$.

On a donc obtenu : $\forall\, n\geq 1,\ (n+1)P_{n+1}-(2n+1)(2X-1)P_n+nP_{n-1}=0$. [Q]

3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*

(a) On utilise la formule d'intégration par parties répétées :

$$\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kU_n^{(k)}(t)f^{(n-k-1)}(t)\Big]_0^1+(-1)^n\int_0^1U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition, les réels 0 et 1 sont des racines de multiplicité n de U_n.

On en déduit que $U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(1)=0$ pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$.

Il en découle l'égalité $\displaystyle\int_0^1U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si Q appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on applique ce qui précède à $f=Q$.

Puisque $Q^{(n)}=0$, on obtient $\displaystyle\int_0^1P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=0$. [Q]

(b) Posons $\displaystyle I_{n,m}=\int_0^1t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on trouve, si $m\geq 1$:

$$I_{n,m}=\frac{1}{n+1}\Big[t^{n+1}(t-1)^m\Big]_0^1-\frac{m}{n+1}\int_0^1t^{n+1}(t-1)^{m-1}\,\mathrm{d}t=-\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.