

Anneaux $\mathbb{Z}[\omega]$. Anneaux intègres et factoriels

Première partie : les anneaux $\mathbb{Z}[\omega]$

Dans cette partie, α est un entier relatif qui n'est le carré d'aucun élément de \mathbb{Z} .

- Si $\alpha > 0$, on pose $\omega = \sqrt{\alpha}$ (c'est un réel strictement positif et irrationnel.)
- Si $\alpha < 0$, on pose $\omega = i\sqrt{-\alpha}$ (c'est un nombre complexe non réel, d'argument $\frac{\pi}{2}$.)

On a donc $\omega^2 = \alpha$.

On pose $\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Ainsi
$$\begin{cases} \text{Si } \alpha = -1, & \mathbb{Q}[i] = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}. \\ \text{Si } \alpha = 2, & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}. \\ \text{Si } \alpha = -2, & \mathbb{Q}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}. \end{cases}$$

1. (a) Soit $z = a + b\omega$ dans $\mathbb{Q}[\omega]$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Montrer que l'écriture de z sous cette forme est unique.

On pose alors $N(z) = (a + b\omega)(a - b\omega) = a^2 - \alpha b^2$, qui est élément de \mathbb{Q} .

Montrer que $N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. [S]

- (b) Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est muni d'une structure de corps. [S]

2. (a) Soit $z = a + b\omega$ dans $\mathbb{Q}[\omega]$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. On pose $z^* = a - b\omega$.

Montrer que $z \mapsto z^*$ est un automorphisme du corps $\mathbb{Q}[\omega]$. [S]

- (b) Soient z, z' dans $\mathbb{Q}[\omega]$. Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$. [S]

3. On pose $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. L'ensemble $\mathbb{Z}[\omega]$ est donc une partie de $\mathbb{Q}[\omega]$.

Pour tout $z = a + b\omega$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a donc
$$\begin{cases} z^* = a - b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] \\ N(z) = zz^* = a^2 - \alpha b^2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un anneau intègre. [S]

- (b) Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\omega]$ si et seulement si $N(z) = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Montrer qu'alors l'inverse de z dans $\mathbb{Z}[\omega]$ est $z^{-1} = \varepsilon z^*$. [S]

4. Montrer que les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ sont $1, i, -1$ et i .

Quels sont ceux de $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$ si $m \geq 2$ (m entier non carré bien sûr)? [S]

5. Dans cette question, on cherche les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

- (a) Soit ε dans $\{-1, 1\}$ et m dans \mathbb{Z} . On pose $z = \varepsilon(1 + \sqrt{2})^m$.

Montrer que z est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, et que $z^{-1} = \varepsilon(-1 + \sqrt{2})^m$. [S]

- (b) Réciproquement, Soit $z = a + b\sqrt{2}$ un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Dans un premier temps, on suppose $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.

- i. Vérifier que si $b = 0$, alors $z = 1$. [S]



- ii. Si $b > 0$, montrer qu'on a les inégalités $0 < b \leq a < 2b$. [S]
- iii. Toujours si $b > 0$, on définit $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ par $z_1 = (\sqrt{2} - 1)z$.
Montrer que z_1 est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et que $0 < a_1 \leq a$ et $0 \leq b_1 < b$. [S]
- iv. En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que $z = (1 + \sqrt{2})^n$.
(On pourra imaginer de construire $z_2 = (\sqrt{2} - 1)z_1$ si $b_1 > 0$, etc.) [S]
- (c) Montrer z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \Leftrightarrow z = \varepsilon(1 + \sqrt{2})^m$, avec $\begin{cases} \varepsilon = \pm 1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ [S]

Dans toute la suite de ce problème :

- A est un anneau intègre (donc commutatif). Ses lois sont notées $(a, b) \mapsto a + b$ et $(a, b) \mapsto ab$.
On note 0 le neutre additif et 1 le neutre multiplicatif de A .
- On note A' le groupe multiplicatif des éléments de A qui sont inversibles pour le produit.
Les éléments de A' seront appelés *unités* de A . L'inverse d'une unité a sera noté a^{-1} .

Deuxième partie : divisibilité dans un anneau intègre

Soient a, b deux éléments quelconques de l'anneau A .

On dit que a *divise* b , et on note $a \mid b$, s'il existe q dans A tel que $b = aq$.

Une telle relation est bien sûr réflexive et transitive.

Quand a divise b , on dit aussi que b est un *multiple* de a , ou que a est un *diviseur* de b .

On note $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a , et $aA = \{ax, x \in A\}$ l'ensemble de ses multiples.

Pour tous a, b de A , on a : $a \mid b \Leftrightarrow b \in aA \Leftrightarrow a \in \mathcal{D}(b) \Leftrightarrow \mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}(b) \Leftrightarrow bA \subset aA$.

1. Soient a, b deux éléments de A . On suppose que a est non nul et qu'il divise b .
Montrer qu'il existe un *unique* élément q de A tel que $b = aq$.
On peut donc parler de l'unicité du quotient exact de b par a . [S]
2. Identifier les ensembles $0A$, $1A$, $\mathcal{D}(0)$ et $\mathcal{D}(1)$. [S]
3. On dit que deux éléments a, b de A sont *associés* si : $\exists u \in A', b = au$.
Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur A .
On notera $\tilde{a} = \{ax, x \in A'\}$ la classe de a , donc l'ensemble des associés de a . [S]

Bien entendu, on a les égalités $\tilde{0} = \{0\}$ et $\tilde{1} = A'$.

Par exemple, si $A = \mathbb{Z}$, on a $A' = \{-1, 1\}$ et $\tilde{a} = \{-a, a\}$ pour tout a .

4. Pour tous a, b de A , montrer l'équivalence : $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \Leftrightarrow b \in \tilde{a}$.
Ainsi on a : $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \Leftrightarrow \mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(b) \Leftrightarrow aA = bA \Leftrightarrow b \in \tilde{a}$. [S]
5. Pour tout a de A , montrer que $A' \cup \tilde{a}$ est inclus dans $\mathcal{D}(a)$.
Ainsi tout élément de A est divisible par ses associés et par les unités de A . [S]
6. On reprend les notations de la partie I, et on se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$.



- (a) Soient z, z' deux éléments de $\mathbb{Z}[\omega]$. On suppose que z' divise z dans $\mathbb{Z}[\omega]$.
Montrer qu'alors l'entier $N(z')$ divise l'entier $N(z)$ dans \mathbb{Z} .
Prouver que si de plus $|N(z')| = |N(z)|$ alors z et z' sont associés. [S]
- (b) Trouver les 16 diviseurs de $4 + 7i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. [S]

Troisième partie : pgcd, ppcm dans un anneau intègre

Soient a et b deux éléments de l'anneau intègre A .

- On dit que a et b ont un *pgcd* s'il existe d dans A tel que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(d)$.
Cela équivaut à dire qu'il existe un élément d tel que : $(x \mid a \text{ et } x \mid b) \Leftrightarrow x \mid d$.
D'après II.3, on a alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(d') \Leftrightarrow d' \in \tilde{d}$.
On dira alors que chaque d' de \tilde{d} est un *pgcd* de a et b , et on pourra noter $\text{pgcd}(a, b) = d'$.
Il est clair qu'un *pgcd* de a et b est en particulier un diviseur commun de a et b .
- On dit que a et b de A sont *étrangers* si $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = A'$.
Cela signifie que les seuls diviseurs communs de a et b sont les unités de A .
Puisque $A' = \tilde{1}$, cela équivaut à dire que 1 est un *pgcd* de a et b .
- On dit que a et b ont un *ppcm* s'il existe m dans A tel que $aA \cap bA = mA$.
Cela équivaut à dire qu'il existe un élément m tel que : $(a \mid x \text{ et } b \mid x) \Leftrightarrow m \mid x$.
D'après II.3, on a alors $aA \cap bA = m'A \Leftrightarrow m' \in \tilde{m}$.
On dira alors que chaque m' de \tilde{m} est un *ppcm* de a et b , et on pourra noter $\text{ppcm}(a, b) = m'$.
Il est clair que si $\text{ppcm}(a, b) = m$, alors $a \mid m$, $b \mid m$ et $m \mid ab$.
- On notera que dans le cas général, deux éléments a, b de l'anneau intègre A peuvent fort bien ne pas posséder de *pgcd* et/ou ne pas posséder de *ppcm*. Quand on écrira $\text{pgcd}(a, b) = d$, par exemple, cela signifiera donc " a et b possèdent un *pgcd*, et d est l'un d'eux".
On a bien sûr les égalités $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$ et $\text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(b, a)$.

1. (a) Vérifier que pour tout a de A , on a $\text{pgcd}(a, 0) = a$ et $\text{ppcm}(a, 0) = 0$. [S]

(b) Plus généralement, montrer que $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \\ \text{ppcm}(a, b) = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0) \end{cases}$ [S]

(c) Montrer les équivalences : $\text{pgcd}(a, b) = a \Leftrightarrow \text{ppcm}(a, b) = b \Leftrightarrow a \mid b$. [S]

2. Soient a et b deux éléments non nuls de A , possédant un *ppcm* m .

En particulier m est non nul et il existe un élément d de A tel que $ab = md$.

Montrer alors que l'élément d est un *pgcd* de a et b . [S]

3. Soient a, b deux éléments non nuls de A . On considère les propriétés :

$$\mathcal{P}_1 : \text{pgcd}(a, b) = 1 \quad \mathcal{P}_2 : \forall x \in A, a \mid bx \Rightarrow a \mid x$$

$$\mathcal{P}_3 : \text{ppcm}(a, b) = ab \quad \mathcal{P}_4 : \exists (u, v) \in A^2, au + bv = 1$$

Montrer les résultats suivants :

- (a) La propriété \mathcal{P}_4 implique la propriété \mathcal{P}_3 . [S]
- (b) La propriété \mathcal{P}_3 implique la propriété \mathcal{P}_2 . [S]
- (c) La propriété \mathcal{P}_2 implique la propriété \mathcal{P}_3 . [S]
- (d) La propriété \mathcal{P}_3 implique la propriété \mathcal{P}_1 . [S]

En conclusion : $\mathcal{P}_4 \Rightarrow \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_3 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$.

- On exprime \mathcal{P}_4 en disant que a et b satisfont à une *identité de Bezout*.
- On exprime \mathcal{P}_2 en disant que a et b satisfont à la *propriété de Gauss*.
- L'équivalence $\mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_3$ montre que \mathcal{P}_2 est symétrique par rapport à a et b .

Quatrième partie : éléments irréductibles ou premiers

Soit p un élément non nul et non inversible de l'anneau intègre A .

- On dit que p est *irréductible* si $\mathcal{D}(p)$ se réduit à $A' \cup \tilde{p}$.
Autrement dit, p est irréductible si ses seuls diviseurs sont ses associés et les unités de A .
- Un élément p non inversible de A est dit *premier* si : $\forall (a, b) \in A^2, p \mid ab \Rightarrow (p \mid a \text{ ou } p \mid b)$.

NB : 0 et les unités de A ne sont pas considérés comme irréductibles ou premiers.

Il est clair que dans l'anneau \mathbb{Z} , un élément p est irréductible si et seulement si il est premier, et plus précisément si et seulement si l'entier $|p|$ est premier (au sens usuel) dans \mathbb{N} .

Il est immédiat que si p est irréductible (resp. premier) et si p' est associé à p , alors p' est irréductible (resp. premier). Autrement dit les notions d'élément irréductible ou premier sont invariantes par association (c'est-à-dire par produit par un élément inversible.)

1. Montrer que si p est premier dans A , alors p est irréductible. [S]
2. On va montrer que la réciproque de la propriété précédente est fausse.
Pour cela on se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
 - (a) Montrer que 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ (utiliser II-5-a) [S]
 - (b) Montrer que 2 n'est pas premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
Pour cela on observera que 2 ne divise ni $1 - i\sqrt{5}$ ni $1 + i\sqrt{5}$. [S]
3. On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$, au sens de la partie I. Soit z un élément de cet anneau.
 - (a) On suppose que l'entier $N(z)$ est premier dans l'anneau \mathbb{Z} .
(Cela signifie donc que $|N(z)|$ est un entier naturel premier au sens usuel.)
Montrer que z est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[\omega]$. [S]
 - (b) En utilisant la question IV-2, montrer que la réciproque est fausse. [S]
4. (a) On se place à nouveau dans $\mathbb{Z}[\omega]$. Soit z un élément non nul et non inversible.
Montrer que z s'écrit au moins d'une façon comme un produit d'éléments irréductibles.
Indication : raisonner par récurrence sur la valeur de $|N(z)|$. [S]



(b) On se place plus particulièrement dans $\mathbb{Z}[i]$, et on considère $z = 19 + 61i$.

On remarque que $N(z) = 19^2 + 61^2 = 4082 = 2 \cdot 13 \cdot 157$.

Trouver une factorisation de z en produit d'éléments irréductibles. [S]

5. Soient a, p, p' deux éléments de A . On suppose que p et p' sont irréductibles.

(a) Montrer que si p ne divise pas a , alors p et a sont étrangers. [S]

(b) Montrer que si p et p' ne sont pas associés, alors ils sont étrangers. [S]

Cinquième partie : anneaux factoriels

Soit A un anneau intègre. On dit que A est *factoriel* si tout élément non nul et non inversible s'écrit de manière *essentiellement unique* comme un produit d'éléments irréductibles.

Cette *unicité essentielle* doit être comprise à l'ordre près et à l'association près des facteurs.

De façon plus précise, soit z un élément non nul et non inversible de A .

Supposons $\begin{cases} z = p_1 p_2 \cdots p_n \\ z = q_1 q_2 \cdots q_m \end{cases}$ avec $n \geq 1, m \geq 1$, les p_k et les q_k étant irréductibles.

Alors $m = n$, et il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, q_k \in \tilde{p}_k$.

Il est clair que l'anneau \mathbb{Z} est factoriel. On sait que dans \mathbb{Z} on a $\tilde{z} = \{z, -z\}$ pour tout z .

Dans \mathbb{Z} , l'entier $z = 30$ peut par exemple s'écrire : $z = 2 \cdot 3 \cdot 5 = (-5) \cdot (-3) \cdot 2$.

1. Soit A un anneau factoriel, et p un élément irréductible de A .

Montrer que p est premier dans A (c'est donc une réciproque de la question IV-1.)

Ainsi, dans un anneau factoriel : “ z est irréductible” équivaut à “ z est premier”.

Remarque : la question IV-2 montre que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel. [S]

2. On reprend ici les notations de la question III-3.

Montrer que dans un anneau factoriel A , la propriété \mathcal{P}_1 implique la propriété \mathcal{P}_2 .

Le th. de Gauss $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 1 \\ a \mid bc \end{cases} \Rightarrow a \mid c$ est donc vrai dans un anneau factoriel. [S]

Soit A un anneau factoriel.

Dans toute décomposition en facteurs irréductibles, on peut grouper les facteurs associés.

Tout élément $a \neq 0$ et non inversible de A s'écrit alors $a = up_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ où :

– L'élément u est inversible.

– Les éléments p_1, p_2, \dots, p_n sont irréductibles et deux à deux non associés.

– Les entiers k_1, k_2, \dots, k_n sont strictement positifs.

Une telle écriture est là encore *essentiellement unique*.

Si on accepte que les exposants soient seulement positifs ou nuls, on peut utiliser cette écriture pour tout élément inversible de A , ou pour “synchroniser” (c'est-à-dire utiliser les mêmes p_k) les décompositions de deux éléments a et b de A . On va voir que dans un anneau factoriel, deux éléments quelconques ont toujours un pgcd et un ppcm. Compte tenu du résultat de la question III-1-a, on peut se limiter au cas où ces deux éléments sont non nuls.