Crochet de Lie et projecteurs en dimension finie

Dans tout le problème :

– n est un entier naturel non nul.

– E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n.

– $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour tous éléments f, g de $\mathcal{L}(E)$, on note $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

– $\mathcal{P}_E$ désigne l'ensemble des projecteurs (projections vectorielles) de E.

Première partie

1. Rappeler pourquoi il est possible de définir la trace d'un endomorphisme de E. [S]
2. Rappeler pourquoi la trace d'un projecteur est égale à son rang. [S]
3. Soient p dans $\mathcal{P}_E$, et f dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
   Montrer que p est l'application nulle. [S]
4. Sur l'ensemble $\mathcal{P}_E$, on pose $p\,\mathcal{R}\,q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$. [S]
5. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^4$. On pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Soit p dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice A dans la base canonique.
   (a) Montrer que p est un projecteur de E.
   Préciser une base (ε') de l'image de p, et une base (ε'') du noyau de p.
   On note alors (ε) la base de E obtenue par juxtaposition de (ε') et de (ε''). [S]
   (b) Caractériser par leur matrice dans (ε) les f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = 0$.
   Interpréter le résultat obtenu en termes de stabilité. [S]
   (c) Caractériser par leur matrice dans (ε) les projecteurs q de E tels que $p\,\mathcal{R}\,q$. [S]
6. Soit p un élément quelconque de $\mathcal{P}_E$, et soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer que $[p, f] = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f. [S]
7. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $[p, q] = 0$.
   (a) Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont dans $\mathcal{P}_E$. [S]
   (b) Montrer que, pour la relation $\mathcal{R}$:
   – Le projecteur $p \circ q$ est le plus grand des minorants de p et q.
   – Le projecteur $p + q - p \circ q$ est le plus petit des majorants de p et q. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[\,f, g\,] = \alpha\, f + \beta\, g$, avec α, β dans $\mathbb{K}$.

1. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Ainsi $[\,f, g\,] = \alpha\, f$, avec $\alpha \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $[\,f^k, g\,] = \alpha\, k f^k$. [S]
   (b) On suppose que $f^m \neq 0$, avec $m \geq 0$.
   Montrer alors que les applications $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^m$ sont libres dans $\mathcal{L}(E)$. [S]
   (c) Déduire de ce qui précède que l'endomorphisme f est nilpotent. [S]
2. Dans cette question, on suppose que f, g sont deux éléments distincts de $\mathcal{P}_E$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à 1.
   (a) Montrer que $2\alpha\, g \circ f + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$. [S]
   (b) En déduire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g$, puis $g \circ f = f$. [S]
   (c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$. [S]
   (d) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p \\ q \circ p = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[\,p, q\,] = q - p$. [S]
   (e) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[\,p, q\,] = q - p$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que f, g sont distincts de $\mathcal{P}_E$, avec $f \neq 0$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à -1.
   (a) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, $f \circ g = f$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. [S]
   (b) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q \\ p \circ q = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[\,p, q\,] = p - q$. [S]
   (c) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[\,p, q\,] = p - q$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base (e) de E.
   On pose $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A)$. Cette définition ne dépend pas de la base (e) utilisée.
   En effet soit (ε) une autre base de E, et P la matrice de passage de (e) à (ε).
   La matrice B de f dans la base (ε) s'écrit $B = P^{-1}AP$.
   On sait d'autre part que pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$.
   On en déduit $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$. [Q]

2. Soit p un projecteur de E, de rang r. Par définition $r = \dim \operatorname{Im}(p)$.
   Si $r = 0$, alors $p = 0$ donc $\operatorname{tr}(p) = 0 = \operatorname{rg}(p)$.
   Si $r = n$, alors $p = \operatorname{Id}$ (car $E = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Inv}(p)$) donc $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n = \operatorname{rg}(p)$.
   Dans le cas général, on a $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et $\dim \operatorname{Im}(p) = r \in \{1, \ldots, n-1\}$.
   On se donne une base (e') de $\operatorname{Im}(p)$ et une base (e'') de $\operatorname{Ker}(p)$.
   On forme une base (e) de E en juxtaposant (e') et (e'').
   Dans la base (e), la matrice de la projection p est $A = J_r(n) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   On en déduit ici $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(A) = r = \operatorname{rg}(p)$. [Q]

3. On suppose donc $p \circ f - f \circ p = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
   Les propriétés de la "trace" donnent $\operatorname{tr}(p \circ f - f \circ p) = \operatorname{tr}(p \circ f) - \operatorname{tr}(f \circ p) = 0$.
   Ainsi $0 = \operatorname{tr}(\alpha p) = \alpha \operatorname{tr}(p)$, ce qui implique $\operatorname{tr}(p) = 0$.
   Or $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$. Il en découle $\operatorname{rg}(p) = 0$ c'est-à-dire $p = 0$. [Q]

4. Réflexivité : pour tout projecteur p, on a $p \circ p = p$ donc $p \,\mathcal{R}\, p$.
   Antisymétrie : si p, q dans $\mathcal{P}_E$ vérifient $p \,\mathcal{R}\, q = q \,\mathcal{R}\, p$, il est évident que $p = q$.
   Transitivité : soient p, q, r trois projecteurs tels que $p \,\mathcal{R}\, q$ et $q \,\mathcal{R}\, r$.
   Alors $\begin{cases} p \circ q = q \circ p = p \\ q \circ r = r \circ q = q \end{cases}$ donc $\begin{cases} p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p \\ r \circ p = r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p = q \circ p = p \end{cases}$
   On a donc montré que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$. [Q]

5. (a) On a immédiatement $A^2 = A$, donc $p^2 = p$: l'application p est un projecteur.
   A est visiblement de rang 2 (colonnes C_1 et C_2 libres, $\mathrm{C}_3 = -\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{C}_4 = \overrightarrow{0}$.)
   Ainsi $\dim \operatorname{Im}(p) = 2$ puis $\dim \operatorname{Ker}(p) = 2$ (théorème de la dimension.)
   Une base (ε') de $\operatorname{Im}(p)$ est formée par $\begin{cases} \varepsilon_1 = 3p(e_1) = (2, 0, -1, 0) \\ \varepsilon_1 = 3p(e_2) = (1, 3, 1, 0) \end{cases}$
   On a $p(e_1) = -p(e_3)$ et $p(e_4) = \overrightarrow{0}$.
   Une base (ε'') de $\operatorname{Ker}(p)$ est donc formée de $\begin{cases} \varepsilon_3 = e_1 + e_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_4 = e_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$