

Crochet de Lie et projecteurs en dimension finie

Dans tout le problème :

- n est un entier naturel non nul.
- E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) de dimension finie n .
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .
Pour tous éléments f, g de $\mathcal{L}(E)$, on note $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.
- \mathcal{P}_E désigne l'ensemble des projecteurs (projections vectorielles) de E .

Première partie

1. Rappeler pourquoi il est possible de définir la trace d'un endomorphisme de E . [S]
2. Rappeler pourquoi la trace d'un projecteur est égale à son rang. [S]
3. Soient p dans \mathcal{P}_E , et f dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.

Montrer que p est l'application nulle. [S]

4. Sur l'ensemble \mathcal{P}_E , on pose $p \mathcal{R} q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathcal{P}_E . [S]

5. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^4$. On pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit p dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice A dans la base canonique.

- (a) Montrer que p est un projecteur de E .

Préciser une base (ε') de l'image de p , et une base (ε'') du noyau de p .

On note alors (ε) la base de E obtenue par juxtaposition de (ε') et de (ε'') . [S]

- (b) Caractériser par leur matrice dans (ε) les f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = 0$.

Interpréter le résultat obtenu en termes de stabilité. [S]

- (c) Caractériser par leur matrice dans (ε) les projecteurs q de E tels que $p \mathcal{R} q$. [S]

6. Soit p un élément quelconque de \mathcal{P}_E , et soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que $[p, f] = 0$ si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f . [S]

7. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $[p, q] = 0$.

- (a) Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont dans \mathcal{P}_E . [S]

- (b) Montrer que, pour la relation \mathcal{R} :

– Le projecteur $p \circ q$ est le plus grand des minorants de p et q .

– Le projecteur $p + q - p \circ q$ est le plus petit des majorants de p et q . [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[f, g] = \alpha f + \beta g$, avec α, β dans \mathbb{K} .

1. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Ainsi $[f, g] = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$.

(a) Montrer que pour tout k de \mathbb{N} on a : $[f^k, g] = \alpha k f^k$. [S]

(b) On suppose que $f^m \neq 0$, avec $m \geq 0$.

Montrer alors que les applications $\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m$ sont libres dans $\mathcal{L}(E)$. [S]

(c) Dédurre de ce qui précède que l'endomorphisme f est nilpotent. [S]

2. Dans cette question, on suppose que f, g sont deux éléments distincts de \mathcal{P}_E .

On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à 1.

(a) Montrer que $2\alpha g \circ f + \beta(1 + \alpha)g = \alpha(1 - \alpha)f$. [S]

(b) En déduire $\text{Im } f \subset \text{Im } g$, puis $g \circ f = f$. [S]

(c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\text{Im } f = \text{Im } g$. [S]

(d) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \text{Im } q \subset \text{Im } p \\ q \circ p = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[p, q] = q - p$. [S]

(e) On reprend les notations de la question I.4

Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de \mathcal{P}_E tels que $[p, q] = q - p$. [S]

3. Dans cette question, on suppose que f, g sont distincts de \mathcal{P}_E , avec $f \neq 0$.

On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à -1 .

(a) Montrer que : $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$, $f \circ g = f$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$. [S]

(b) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \text{Ker } p \subset \text{Ker } q \\ p \circ q = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[p, q] = p - q$. [S]

(c) On reprend les notations de la question I.4

Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de \mathcal{P}_E tels que $[p, q] = p - q$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

- Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base (e) de E .
On pose $\text{tr}(f) = \text{tr}(A)$. Cette définition ne dépend pas de la base (e) utilisée.
En effet soit (ε) une autre base de E , et P la matrice de passage de (e) à (ε) .
La matrice B de f dans la base (ε) s'écrit $B = P^{-1}AP$.
On sait d'autre part que pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.
On en déduit $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A)$. [Q]
- Soit p un projecteur de E , de rang r . Par définition $r = \dim \text{Im}(p)$.
Si $r = 0$, alors $p = 0$ donc $\text{tr}(p) = 0 = \text{rg}(p)$.
Si $r = n$, alors $p = \text{Id}$ (car $E = \text{Im}(p) = \text{Inv}(p)$) donc $\text{tr}(p) = \text{tr}(I_n) = n = \text{rg}(p)$.
Dans le cas général, on a $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et $\dim \text{Im}(p) = r \in \{1, \dots, n-1\}$.
On se donne une base (e') de $\text{Im}(p)$ et une base (e'') de $\text{Ker}(p)$.
On forme une base (e) de E en juxtaposant (e') et (e'') .
Dans la base (e) , la matrice de la projection p est $A = J_r(n) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
On en déduit ici $\text{tr}(p) = \text{tr}(A) = r = \text{rg}(p)$. [Q]
- On suppose donc $p \circ f - f \circ p = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
Les propriétés de la "trace" donnent $\text{tr}(p \circ f - f \circ p) = \text{tr}(p \circ f) - \text{tr}(f \circ p) = 0$.
Ainsi $0 = \text{tr}(\alpha p) = \alpha \text{tr}(p)$, ce qui implique $\text{tr}(p) = 0$.
Or $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$. Il en découle $\text{rg}(p) = 0$ c'est-à-dire $p = 0$. [Q]
- Réflexivité : pour tout projecteur p , on a $p \circ p = p$ donc $p \mathcal{R} p$.
Antisymétrie : si p, q dans \mathcal{P}_E vérifient $p \mathcal{R} q = q \mathcal{R} p$, il est évident que $p = q$.
Transitivité : soient p, q, r trois projecteurs tels que $p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} r$.
Alors $\begin{cases} p \circ q = q \circ p = p \\ q \circ r = r \circ q = q \end{cases}$ donc $\begin{cases} p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p \\ r \circ p = r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p = q \circ p = p \end{cases}$
On a donc montré que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathcal{P}_E . [Q]
- (a) On a immédiatement $A^2 = A$, donc $p^2 = p$: l'application p est un projecteur.
 A est visiblement de rang 2 (colonnes C_1 et C_2 libres, $C_3 = -C_1$ et $C_4 = \vec{0}$.)
Ainsi $\dim \text{Im}(p) = 2$ puis $\dim \text{Ker}(p) = 2$ (théorème de la dimension.)
Une base (ε') de $\text{Im}(p)$ est formée par $\begin{cases} \varepsilon_1 = 3p(e_1) = (2, 0, -1, 0) \\ \varepsilon_2 = 3p(e_2) = (1, 3, 1, 0) \end{cases}$
On a $p(e_1) = -p(e_3)$ et $p(e_4) = \vec{0}$.
Une base (ε'') de $\text{Ker}(p)$ est donc formée de $\begin{cases} \varepsilon_3 = e_1 + e_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_4 = e_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$