Quatre exercices indépendants

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : vers l'opération ensembliste unique ?

Soit E un ensemble non vide. Le complémentaire dans E de toute partie A de E est noté $\overline{A}$.

Dans $\mathcal{P}(E)$, on connait les opérations $\cap$ (intersection), $\cup$ (réunion), $\setminus$ (soustraction ensembliste), Δ (différence symétrique), et l'opération "passage au complémentaire". Dans la suite de cet exercice, elles seront appelées *opérations usuelles*.
On appelera *expression ensembliste* toute expression formée à l'aide d'un nombre fini de parties de E combinées entre elles au moyen d'opérations usuelles.

Par exemple, si A, B, C sont des parties de E, voici quelques expressions ensemblistes :

$$\emptyset, \quad E, \quad A, \quad A \cup B, \quad (A\Delta C) \setminus (\overline{A} \cap B), \quad \text{etc.}$$

On dira par exemple que A, B, C sont les "symboles" de l'expression $(A\Delta C) \setminus (\overline{A} \cap B)$.
Dans un souci d'économie, on étudie s'il est possible de réécrire toute expression ensembliste à l'aide de certaines seulement des opérations usuelles (question 1), voire d'une seule d'entre elles (question 2, quitte à utiliser un symbole qui n'était pas dans l'expression initiale), ou éventuellement à l'aide d'une seule opération bien choisie (question 3, cette fois-ci sans utiliser d'autres symboles que ceux qui apparaissaient dans l'expression initiale).

1. Montrer que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement l'intersection et le passage au complémentaire.
2. Montrer que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement la différence ensembliste (au prix éventuel de l'utilisation d'un symbole supplémentaire.)
3. On définit une opération notée ∇ en posant :
$$\forall (X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3,\ \nabla(X, Y, Z) = \left(\overline{X} \cap Y \cap Z\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(\overline{Y} \cap \overline{Z}\right)$$
   (a) Montrer que dans $\mathcal{P}(E)$ le "passage au complémentaire" peut s'exprimer au moyen de l'opération ∇, sans utilisation de symbole supplémentaire.
   (b) Montrer qu'il en est de même pour l'opération "intersection".
   (c) En déduire que toute expression ensembliste peut être réécrite en utilisant uniquement l'opération ∇ et sans utiliser d'autres symboles que ceux qui figuraient au départ dans cette expression.

Exercice 2 : Propriétés caractéristiques de certaines sommes d'entiers

1. Rappeler pourquoi, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.
2. Réciproquement, on se donne une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs.

   On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.

   Montrer que pour tout entier k on a $x_k = k$.
3. Soit p un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

   On suppose que pour $n \geq 1$, S_n est un carré (c'est le cas si $p = 3\ldots$)

   Montrer que l'entier p est nécessairement égal à 3.

Exercice 3 : étude d'une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$.
L'objectif de cet exercice est de prouver que les deux seules possibilités (qui par ailleurs conviennnent de façon évidente) sont :

- L'application nulle, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 0$.
- L'application identité, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Dans la suite de l'exercice, on note a l'entier naturel $f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que pour n de $\mathbb{N}$, on a $f(n^2) = f(n)^2$.
2. Montrer alors que $a^2 = a$, donc que a est égal à 0 ou à 1.

   Pour répondre à la question posée, il suffit visiblement de prouver que l'égalité $f(n) = an$, déjà vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, est vraie pour tout entier naturel n.
3. Vérifier successivement les égalités $f(2) = 2a$, $f(4) = 4a$, et $f(5) = 5a$.
4. Utiliser les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(3) = 3a$.
5. Utiliser les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(7) = 7a$.
6. Montrer que $f(8) = 8a$, $f(9) = 9a$, $f(10) = 10a$ et $f(6) = 6a$.
7. Observer que pour tout entier m on a $\begin{cases} (2m)^2 + (m-5)^2 = (2m-4)^2 + (m+3)^2 \\ (2m+1)^2 + (m-2)^2 = (2m-1)^2 + (m+2)^2 \end{cases}$

   Montrer que pour n, on a $f(n) = an$.
8. Conclusion ?

Exercice 4 : théorème de Cantor-Bernstein

Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. On veut prouver qu'il existe une bijection h de E sur F.

On note $\varphi = g \circ f$: cette application est donc injective de E dans lui-même.

Soit $\overline{g(F)}$ le complémentaire de $g(F)$ dans E, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ne sont l'image par g d'aucun élément de F. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties X de E qui contienent à la fois $\overline{g(F)}$ et $\varphi(X)$. Bien entendu E lui-même est un élément de $\mathcal{E}$.

1. On note K l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que K est un élément de $\mathcal{E}$.

   Indication : par définition, l'ensemble K est inclus dans tous les éléments X de $\mathcal{E}$.
2. Soit $\widehat{K} = \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$: le résultat de la question précédente s'écrit donc $\widehat{K} \subset K$.

   Montrer que $\overline{g(F)} \cup \varphi(\widehat{K}) \subset \widehat{K}$. En déduire que $\widehat{K}$ est élément de $\mathcal{E}$, et que $\widehat{K} = K$.
3. Montrer que $\overset{-1}{g}(K)$ (l'image réciproque de K par g) est égale à $f(K)$.

   Indication : g étant injective, on sait que $\overset{-1}{g}(g(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.
4. Pour tout x de K, on pose $h(x) = f(x)$.

   Pour tout x de $\overline{K}$, $h(x)$ désigne l'unique antécédent de x par g (justifier son existence.)

   On définit ainsi une application h de E dans F. Montrer que h est bijective.

   (Indication : on prouvera successivement la surjectivité et l'injectivité de h, en discutant suivant la position dans E ou dans F, des éléments concernés.)
5. Conclusion ?