Fonctions convexes f telles que f(x+1)-f(x)=ln(x) et f(1)=0

Question de cours

Démontrer la proposition suivante :

Proposition *(une caractérisation de la convexité)*

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :

Pour tout $a < b < c$ de I, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Probleme

Rappel

Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I, à valeurs réelles.

Si f est convexe, alors elle est dérivable à gauche et dérivable à droite en tout point de I.

On rappelle également que pour tout x de I on a l'inégalité $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

On note $\mathcal{P}$ le problème suivant :

Trouver les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} (i) & \text{L'application } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^{+*} \\ (ii) & \text{Pour tout } x > 0, \text{ on a : } f(x+1) - f(x) = \ln x \\ (iii) & \text{L'application } f \text{ s'annule au point 1} \end{cases}$$

Première partie.

Dans cette partie, on suppose que le problème $\mathcal{P}$ admet au moins une solution.

On étudie les propriétés d'une solution f de ce problème.

1. (a) Calculer $f(n)$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]

   (b) Calculer la limite de f en 0. [S]

   (c) Justifier l'existence du réel $m = \inf_{[1,2]} f(x)$.

   Montrer que $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq \ln(x-1) + m$.

   On en déduit en particulier que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. [S]

2. On définit l'application d_f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $d_f(x) = f'_d(x) - f'_g(x)$.

   (a) Pour $x > 0$ et $0 < h < 1$, prouver les inégalités

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \ln x \leq \frac{f(x+1)-f(x+h)}{1-h}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

En déduire les inégalités : $f'_d(x) \leq \ln x \leq f'_g(x+1)$. [S]

(b) Montrer que $d_f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. [S]

(c) Prouver que l'application d_f est périodique de période 1. [S]

(d) Montrer finalement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. [S]

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $f'(n) \geq f'(1) + \ln n$.
En déduire que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. [S]

4. Montrer que f' s'annule en un point a de $]1, 2[$.
Montrer que a est l'unique point de $\mathbb{R}^{+*}$ où f' s'annule. [S]

5. En déduire le tableau de variations de f, ainsi que son signe. [S]

Deuxième partie.

Dans cette partie, on veut montrer que le problème $\mathcal{P}$ ne possède au plus qu'une solution.
Pour cela on se donne deux solutions f et g de $\mathcal{P}$, et leur différence $h = f - g$.
Il s'agit donc de montrer que l'application h est identiquement nulle.

1. Montrer que l'application h est périodique de période 1. [S]

2. Soit x un réel quelconque dans $[1, +\infty[$, et soit n la partie entière de x.
Montrer que $0 \leq f'(x) - f'(n) \leq \frac{1}{n}$ et que $0 \leq g'(x) - g'(n) \leq \frac{1}{n}$.
En déduire $|\, h'(x) - h'(1)\,| \leq \frac{1}{n}$ pour tout x de $[n, n+1[$. [S]

3. Déduire de la question précédente que h' est constante sur $[1, +\infty[$. [S]

4. Montrer finalement que h est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. Conclure. [S]

Troisième partie.

Dans cette partie, on montrer que le problème $\mathcal{P}$ possède une solution unique.
Pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x > 0$, on pose $f_n(x) = x \ln n + \ln n! - \sum_{k=0}^{n} \ln(x + k)$.

1. Montrer que f_n est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. [S]

2. (a) Montrer que pour $u > 0$, on a : $1 - \frac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1$. [S]

(b) En déduire que pour $n \geq 2$ et $x > 0$, on a : $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x(1+x)}{n(n+1)}$. [S]

(c) Pour tout $x > 0$, montrer que la suite $n \mapsto f_n(x)$ est convergente. [S]

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

(a) Vérifier que $f(1) = 0$. [S]

(b) Prouver que l'application f est convexe. [S]

(c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x + 1) - f(x) = \ln x$. [S]

(d) Conclure. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.