

## Fonctions convexes $f$ telles que $f(x+1)-f(x)=\ln(x)$ et $f(1)=0$

### QUESTION DE COURS

Démontrer la proposition suivante :

**Proposition** (*une caractérisation de la convexité*)

Une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si :

Pour tout  $a < b < c$  de  $I$ ,  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$

### PROBLEME

#### Rappel

Soit  $f$  une application définie sur un intervalle ouvert  $I$ , à valeurs réelles.

Si  $f$  est convexe, alors elle est dérivable à gauche et dérivable à droite en tout point de  $I$ .

On rappelle également que pour tout  $x$  de  $I$  on a l'inégalité  $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ .

On note  $\mathcal{P}$  le problème suivant :

Trouver les applications  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \text{ L'application } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^{+*} \\ (ii) \text{ Pour tout } x > 0, \text{ on a : } f(x+1) - f(x) = \ln x \\ (iii) \text{ L'application } f \text{ s'annule au point } 1 \end{array} \right.$$

#### PREMIÈRE PARTIE.

Dans cette partie, on suppose que le problème  $\mathcal{P}$  admet au moins une solution.

On étudie les propriétés d'une solution  $f$  de ce problème.

1. (a) Calculer  $f(n)$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ . [S]

(b) Calculer la limite de  $f$  en 0. [S]

(c) Justifier l'existence du réel  $m = \inf_{[1,2]} f(x)$ .

Montrer que  $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq \ln(x-1) + m$ .

On en déduit en particulier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . [S]

2. On définit l'application  $d_f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $d_f(x) = f'_d(x) - f'_g(x)$ .

(a) Pour  $x > 0$  et  $0 < h < 1$ , prouver les inégalités

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \ln x \leq \frac{f(x+1) - f(x+h)}{1-h}$$



- En déduire les inégalités :  $f'_d(x) \leq \ln x \leq f'_g(x+1)$ . [S]
- (b) Montrer que  $d_f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . [S]
- (c) Prouver que l'application  $d_f$  est périodique de période 1. [S]
- (d) Montrer finalement que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . [S]
3. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a  $f'(n) \geq f'(1) + \ln n$ .  
En déduire que  $f'(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . [S]
4. Montrer que  $f'$  s'annule en un point  $a$  de  $]1, 2[$ .  
Montrer que  $a$  est l'unique point de  $\mathbb{R}^{+*}$  où  $f'$  s'annule. [S]
5. En déduire le tableau de variations de  $f$ , ainsi que son signe. [S]

## DEUXIÈME PARTIE.

Dans cette partie, on veut montrer que le problème  $\mathcal{P}$  ne possède au plus qu'une solution.

Pour cela on se donne deux solutions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{P}$ , et leur différence  $h = f - g$ .

Il s'agit donc de montrer que l'application  $h$  est identiquement nulle.

1. Montrer que l'application  $h$  est périodique de période 1. [S]
2. Soit  $x$  un réel quelconque dans  $[1, +\infty[$ , et soit  $n$  la partie entière de  $x$ .  
Montrer que  $0 \leq f'(x) - f'(n) \leq \frac{1}{n}$  et que  $0 \leq g'(x) - g'(n) \leq \frac{1}{n}$ .  
En déduire  $|h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $x$  de  $[n, n+1[$ . [S]
3. Déduire de la question précédente que  $h'$  est constante sur  $[1, +\infty[$ . [S]
4. Montrer finalement que  $h$  est nulle sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Conclure. [S]

## TROISIÈME PARTIE.

Dans cette partie, on montrera que le problème  $\mathcal{P}$  possède une solution unique.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , et tout  $x > 0$ , on pose  $f_n(x) = x \ln n + \ln n! - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$ .

1. Montrer que  $f_n$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . [S]
2. (a) Montrer que pour  $u > 0$ , on a :  $1 - \frac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1$ . [S]  
(b) En déduire que pour  $n \geq 2$  et  $x > 0$ , on a :  $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x(1+x)}{n(n+1)}$ . [S]  
(c) Pour tout  $x > 0$ , montrer que la suite  $n \mapsto f_n(x)$  est convergente. [S]
3. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , on pose  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .  
(a) Vérifier que  $f(1) = 0$ . [S]  
(b) Prouver que l'application  $f$  est convexe. [S]  
(c) Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x+1) - f(x) = \ln x$ . [S]  
(d) Conclure. [S]