Fonctions convexes f telles que f(x+1)-f(x)=ln(x) et f(1)=0

Question de cours

Démontrer la proposition suivante :

Proposition *(une caractérisation de la convexité)*

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :

Pour tout $a < b < c$ de I, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Probleme

Rappel

Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I, à valeurs réelles.
Si f est convexe, alors elle est dérivable à gauche et dérivable à droite en tout point de I.
On rappelle également que pour tout x de I on a l'inégalité $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

On note $\mathcal{P}$ le problème suivant :
Trouver les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} (i) & \text{L'application } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^{+*} \\ (ii) & \text{Pour tout } x > 0, \text{ on a : } f(x+1) - f(x) = \ln x \\ (iii) & \text{L'application } f \text{ s'annule au point } 1 \end{cases}$$

Première partie.

Dans cette partie, on suppose que le problème $\mathcal{P}$ admet au moins une solution.

On étudie les propriétés d'une solution f de ce problème.

1. (a) Calculer $f(n)$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
   (b) Calculer la limite de f en 0. [S]
   (c) Justifier l'existence du réel $m = \inf\limits_{[1,2]} f(x)$.
   Montrer que $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq \ln(x-1) + m$.
   On en déduit en particulier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. [S]
2. On définit l'application d_f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $d_f(x) = f'_d(x) - f'_g(x)$.
   (a) Pour $x > 0$ et $0 < h < 1$, prouver les inégalités
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \ln x \leq \frac{f(x+1)-f(x+h)}{1-h}$$

En déduire les inégalités : $f'_d(x) \leq \ln x \leq f'_g(x+1)$. [S]

(b) Montrer que $d_f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. [S]

(c) Prouver que l'application d_f est périodique de période 1. [S]

(d) Montrer finalement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. [S]

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $f'(n) \geq f'(1) + \ln n$.
   En déduire que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. [S]
4. Montrer que f' s'annule en un point a de $]1, 2[$.
   Montrer que a est l'unique point de $\mathbb{R}^{+*}$ où f' s'annule. [S]
5. En déduire le tableau de variations de f, ainsi que son signe. [S]

Deuxième partie.

Dans cette partie, on veut montrer que le problème $\mathcal{P}$ ne possède au plus qu'une solution.
Pour cela on se donne deux solutions f et g de $\mathcal{P}$, et leur différence $h = f - g$.
Il s'agit donc de montrer que l'application h est identiquement nulle.

1. Montrer que l'application h est périodique de période 1. [S]
2. Soit x un réel quelconque dans $[1, +\infty[$, et soit n la partie entière de x.
   Montrer que $0 \leq f'(x) - f'(n) \leq \frac{1}{n}$ et que $0 \leq g'(x) - g'(n) \leq \frac{1}{n}$.
   En déduire $|\, h'(x) - h'(1)\, | \leq \frac{1}{n}$ pour tout x de $[n, n+1[$. [S]
3. Déduire de la question précédente que h' est constante sur $[1, +\infty\,[$. [S]
4. Montrer finalement que h est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. Conclure. [S]

Troisième partie.

Dans cette partie, on montrer que le problème $\mathcal{P}$ possède une solution unique.

Pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x > 0$, on pose $f_n(x) = x \ln n + \ln n! - \sum_{k=0}^{n} \ln(x + k)$.

1. Montrer que f_n est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. [S]
2. (a) Montrer que pour $u > 0$, on a : $1 - \frac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1$. [S]
   (b) En déduire que pour $n \geq 2$ et $x > 0$, on a : $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x(1+x)}{n(n+1)}$. [S]
   (c) Pour tout $x > 0$, montrer que la suite $n \mapsto f_n(x)$ est convergente. [S]
3. Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
   (a) Vérifier que $f(1) = 0$. [S]
   (b) Prouver que l'application f est convexe. [S]
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x + 1) - f(x) = \ln x$. [S]
   (d) Conclure. [S]