Droites de meilleure approximation

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les trois points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives $(x_1 = 0, y_1 = 0)$, $(x_2 = 1, y_2 = 1)$, $(x_3 = -2, y_3 = 0)$.

On va étudier par différentes méthodes l'ajustement du "nuage" (M_1, M_2, M_3) par une droite.

On désigne par :

- δ une direction donnée du plan.
- D une droite non parallèle à δ, d'équation $y = ax + b$.

On projette les points M_1, M_2, M_3 sur D dans la direction δ.

On note respectivement m_1, m_2, m_3 les points obtenus.

1. Dans cette question, la direction δ est celle de l'axe des ordonnées Oy.

   On cherche la droite D rendant minimale l'expression $f(a, b) = M_1m_1 + M_2m_2 + M_3m_3$.

   (a) Calculer les distances M_1m_1, M_2m_2, et M_3m_3. [S]

   (b) Dans cette question, le nombre réel b est fixé.

   En discutant suivant b, étudier la fonction φ définie par $\varphi(x) = |2x - b| + |x + b - 1|$.

   Montrer que l'application φ passe par un minimum pour $x = \frac{b}{2}$. [S]

   (c) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple (a_1, b_1) minimisant $f(a, b)$.

   Identifier la droite D d'équation $y_1 = a_1x + b_1$. [S]

2. Dans cette question, la direction δ est encore celle de l'axe des ordonnées.

   On cherche la droite D minimisant l'expression $g(a, b) = \max(M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3)$.

   (a) On définit les trois ensembles suivants :

   - l'ensemble E_1 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|y| \leq \frac{1}{3}$.
   - l'ensemble E_2 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|y - 2x| \leq \frac{1}{3}$.
   - l'ensemble E_3 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|x + y - 1| \leq \frac{1}{3}$.

   Montrer que leur intersection $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ se réduit au seul couple $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. [S]

   (b) Prouver l'existence et l'unicité d'une droite D minimisant $g(a, b)$. [S]

3. Dans cette question, la direction δ est toujours celle de l'axe des ordonnées.

   On cherche la droite D rendant minimale $h(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$.

   Le nombre réel a étant fixé, montrer que la fonction $b \mapsto h(a, b)$ admet un minimum en un point unique que l'on précisera.

   En déduire l'existence et l'unicité d'une droite D minimisant $h(a, b)$. [S]

4. Dans cette question, λ est un nombre réel donné, dictinct de a.

   La direction δ est celle de la droite d'équation $y = \lambda x$.

   On cherche la droite D minimisant l'expression $h_\lambda(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$.

(a) Exprimer $h_\lambda(a,b)$ en fonction de a, b, λ. [S]

(b) Dans cette question, le nombre λ est fixé et différent de $\frac{2}{7}$.

a étant donné, pour quelle valeur de b la fonction $b \mapsto h_\lambda(a,b)$ est-elle minimale ?

En déduire que $h_\lambda(a,b)$ est minimal lorsque $\theta(a) = \dfrac{7a^2 - 4a + 1}{(a-\lambda)^2}$ est minimal. [S]

(c) Étudier les variations de la fonction θ. [S]

(d) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple (a_4, b_4) conduisant à la plus petite valeur possible pour $h_\lambda(a,b)$. On explicitera a_4 et b_4 en fonction de λ. [S]

(e) Montrer qu'une telle droite D (d'équation $y = ax + b$) n'existe pas si $\lambda = \frac{2}{7}$. [S]

(f) Toujours si $\lambda = \frac{2}{7}$, vérifier l'existence d'une droite D solution mais d'équation $x = \alpha$ (autrement dit, la quantité $h_\lambda(a,b)$ est minimum si on projette parallèlement à la direction $y = \lambda x$ et sur une droite D “verticale”.) [S]

5. Dans cette question, n est un entier strictement positif.

On se donne un “nuage” de n points $M_k(x_k, y_k)$, avec $1 \le k \le n$.

On suppose que les points M_k ne sont pas alignés sur une même droite. On pose

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2, \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

On définit également $\mathrm{v}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $\mathrm{v}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$, et $\mathrm{cov}(x,y) = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$.

Soit m_k la projection de M_k sur la droite D d'équation $y = ax + b$ parallèlement à Oy.

On se propose de trouver le couple (a,b) minimisant l'expression $H(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (M_k m_k)^2$.

(a) En considérant $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$, montrer que $\mathrm{v}(x) > 0$. [S]

(b) Quand on fixe a, montrer que $H(a,b)$ est minimum quand $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Comment peut-on interpréter ce résultat ? [S]

(c) Montrez que le calcul précédent permet d'établir que $|\mathrm{cov}(x,y)| < \mathrm{v}(x)\,\mathrm{v}(y)$. [S]

(d) En déduire l'unique couple (a,b) minimisant la fonction H.

Quelle est la valeur de ce minimum ? [S]

6. Dans cette question, on projette les n points M_k sur la droite D d'équation $y = ax + b$, parallèlement à la direction $y = \lambda x$ (où λ est un réel fixé distinct de a.)

Pour chaque λ, on cherche s'il existe un couple (a,b) minimisant $H_\lambda(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (M_k m_k)^2$.

En s'inspirant de ce qui précède, étudier l'existence d'un tel couple (a,b) et le cas échéant donner la valeur obtenue pour le minimum de $H_\lambda(a,b)$.

Pour simplifier les notations, on pourra poser : $v = \mathrm{v}(x)$, $w = \mathrm{v}(y)$, $c = \mathrm{cov}(x,y)$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

   Le point correspondant m sur D est $m(x, ax+b)$ et la distance Mm est $|ax+b-y|$.

   Ainsi $M_1m_1 = |b|$, $M_2m_2 = |a+b-1|$, et $M_3m_3 = |2a-b|$. [Q]

   (b) $x \mapsto 2x-b$ s'annule pour $x = \frac{b}{2}$ et $x \mapsto x+b-1$ s'annule pour $x = 1-b$.

   D'autre part, $\frac{b}{2} < 1-b \Leftrightarrow b < \frac{2}{3}$. On en déduit :

   – Si $b < \frac{2}{3}$, $\varphi(x) = \begin{cases} (-2x+b)+(-x-b+1) = -3x+1 & \text{sur }]-\infty, \frac{b}{2}] \\ (2x-b)+(-x-b+1) = x-2b+1 & \text{sur } [\frac{b}{2}, 1-b] \\ (2x-b)+(x+b-1) = 3x-1 & \text{sur } [1-b, \infty[\end{cases}$

   φ est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{b}{2}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{b}{2}, +\infty[$.

   Elle présente donc un minimum absolu en $x = \frac{b}{2}$, qui vaut $\varphi(\frac{b}{2}) = 1 - \frac{3b}{2}$.

   – Si $b = \frac{2}{3}$, alors $\varphi(x) = \left|2x - \frac{2}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{3}\right| = 3\left|x - \frac{2}{3}\right| = |3x-1|$.

   Dans ces conditions, $\varphi(x) = -3x+1$ sur $]-\infty, \frac{1}{3}]$ et $\varphi(x) = 3x-1$ sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$.

   Bien sûr, φ est minimim en $x = \frac{1}{3} = \frac{b}{2}$, et ce minimum est nul.

   – Si $b > \frac{2}{3}$, $\varphi(x) = \begin{cases} (-2x+b)+(-x-b+1) = -3x+1 & \text{sur }]-\infty, 1-b] \\ (-2x+b)+(x+b-1) = -x+2b-1 & \text{sur } [1-b, \frac{b}{2}] \\ (2x-b)+(x+b-1) = 3x-1 & \text{sur } [\frac{b}{2}, \infty[\end{cases}$

   φ est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{b}{2}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{b}{2}, +\infty[$.

   Elle présente donc un minimum absolu en $x = \frac{b}{2}$, qui vaut $\varphi(\frac{b}{2}) = \frac{3b}{2} - 1$.

   Dans tous les cas, le minimum φ est atteint en $x = \frac{b}{2}$ et vaut $\varphi(\frac{b}{2}) = \left|\frac{3b}{2} - 1\right|$. [Q]

   (c) D'après ce qui précède, $f(a,b) = |b| + |a+b-1| + |2a-b| = |b| + \varphi(a)$.

   À b fixé, le minimum de $f(a,b)$ est obtenu pour $a = \frac{b}{2}$ et vaut $|b| + \left|\frac{3b}{2} - 1\right|$.

   On doit donc chercher pour quel b la quantité $h(b) = |b| + \left|\frac{3b}{2} - 1\right|$ est minimum.

   – Si $b \leq 0$, $h(b) = -b - \frac{3b}{2} + 1 = -\frac{5b}{2} + 1$.

   – Si $b \in [0, \frac{2}{3}]$, $h(b) = b - \frac{3b}{2} + 1 = -\frac{b}{2} + 1$.

   – Si $b \in [\frac{2}{3}, +\infty[$, $h(b) = b + \frac{3b}{2} - 1 = \frac{5b}{2} - 1$.

   Ainsi h est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{2}{3}]$ et strictement croissante sur $[0, \frac{2}{3}]$.

   Cette application possède donc un minimum absolu en $b = \frac{2}{3}$; qui vaut $\frac{2}{3}$.

   La quantité $f(a,b)$ est donc minimum pour l'unique couple $(a_1, b_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

   La droite D a pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. C'est la droite joignant M_2 et M_3.

   On a donc ici $m_2 = M_2$ et $m_3 = M_3$. [Q]