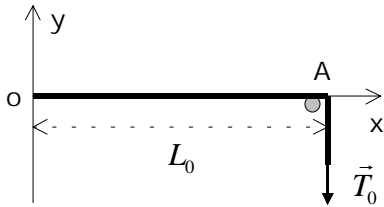


-EXERCICE 32.4-

- **ENONCE** : « Aspect énergétique d'une corde »



Une corde sans raideur et inextensible est tendue entre 2 points O et A.
 Au repos, elle se confond avec l'axe Ox: sa tension est donc suffisamment grande pour que l'on puisse négliger son poids devant les forces dues à cette tension.
 On néglige également toute cause d'amortissement du mouvement de la corde.

- Dans l'hypothèse des petits mouvements, on admet donc que l'élongation d'un point de la corde

$y(x,t)$ satisfait à l'équation de D'Alembert, avec une célérité : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ (μ = masse linéique).

- 1) En pratique, quelles seraient les causes d'amortissement du mouvement ?
- 2) Définir la densité linéique d'énergie cinétique de la corde, soit $e_c(x,t)$.
- 3) En fait, la corde ne peut à la fois être fixée en 2 points, osciller (donc se déformer) et être parfaitement inextensible ; pour conserver l'hypothèse d'inextensibilité (afin de ne pas introduire de forces supplémentaires), nous supposons que la corde glisse sans frottements dans la gorge d'une poulie sans masse (de manière à ce que cette dernière transmette intégralement la tension $T_0 = \|\vec{T}_0\|$) : la longueur de la corde en mouvement est donc $L(t) \geq L_0$.

Exprimer la variation de longueur $L(t) - L_0$ sous forme d'une intégrale.

Après avoir déterminé le travail W_{op} d'un opérateur faisant passer la corde de l'état de repos à l'état « déformé », exprimer la densité linéique d'énergie potentielle de la corde $e_p(x,t)$ (énergie associée à un état de tension et de courbure). En quoi la grandeur obtenue est-elle une énergie potentielle ?

- 4) Donner l'expression d'une grandeur $P(x,t)$ telle que :

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = 0}, \text{ avec } e(x,t) = e_c(x,t) + e_p(x,t) = \text{densité linéique d'énergie de la corde.}$$

Quelle est la dimension de $P(x,t)$?

Intégrer la relation précédente entre 2 points fixes ; interpréter le résultat et en déduire la signification physique de $P(x,t)$.

- 5) On s'intéresse au mode stationnaire de vibration de rang n, d'expression :

$$y_n(x,t) = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x), \text{ avec } k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L_0}$$

Calculer l'énergie totale de la corde E_n (associée au mode n) en fonction de n, A_n, L_0 et T_0 .

- 6) En déduire l'énergie totale de la corde en tenant compte de tous les modes.
 Justifier que l'amplitude A_n des harmoniques doit décroître au moins en $1/n^2$; pour une corde « frappée » (corde de piano, par exemple), on trouve que A_n décroît en $1/n$: discuter ce résultat.