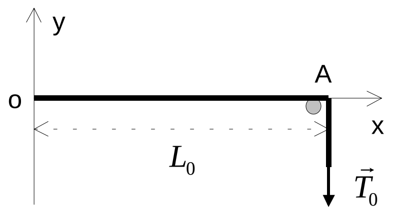
-EXERCICE 32.4-

• ENONCE : « Aspect énergétique d'une corde »



Une corde sans raideur et inextensible est tendue entre 2 points O et A.
Au repos, elle se confond avec l'axe Ox: sa tension est donc suffisamment grande pour que l'on puisse négliger son poids devant les forces dues à cette tension.
On néglige également toute cause d'amortissement du mouvement de la corde.

• Dans l'hypothèse des petits mouvements, on admet donc que l'élongation d'un point de la corde $y(x,t)$ satisfait à l'équation de D'Alembert, avec une célérité : $c=\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ (μ = masse linéique).

1) En pratique, quelles seraient les causes d'amortissement du mouvement ?

2) Définir la densité linéique d'énergie cinétique de la corde, soit $e_C(x,t)$.

3) En fait, la corde ne peut à la fois être fixée en 2 points, osciller (donc se déformer) et être parfaitement inextensible ; pour conserver l'hypothèse d'inextensibilité (afin de ne pas introduire de forces supplémentaires), nous supposerons que la corde glisse sans frottements dans la gorge d'une poulie sans masse (de manière à ce que cette dernière transmette intégralement la tension $T_0=\left\|\vec{T}_0\right\|$) : la longueur de la corde en mouvement est donc $L(t)\geq L_0$.

Exprimer la variation de longueur $L(t)-L_0$ sous forme d'une intégrale.

Après avoir déterminé le travail W_{op} d'un opérateur faisant passer la corde de l'état de repos à l'état « déformé », exprimer la densité linéique d'énergie potentielle de la corde $e_P(x,t)$ (énergie associée à un état de tension **et** de courbure). En quoi la grandeur obtenue est-elle une énergie potentielle ?

4) Donner l'expression d'une grandeur $P(x,t)$ telle que :

$\boxed{\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}+\dfrac{\partial e(x,t)}{\partial t}=0}$, avec $e(x,t)=e_C(x,t)+e_P(x,t)$ = densité linéique d'énergie de la corde.

Quelle est la dimension de $P(x,t)$?

Intégrer la relation précédente entre 2 points fixes ; interpréter le résultat et en déduire la signification physique de $P(x,t)$.

5) On s'intéresse au mode stationnaire de vibration de rang n, d'expression :

$y_n(x,t)=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)\sin(k_n x)$, avec $k_n=\dfrac{\omega_n}{c}=\dfrac{n\pi}{L_0}$

Calculer l'énergie totale de la corde E_n (associée au mode n) en fonction de n, A_n, L_0 et T_0.

6) En déduire l'énergie totale de la corde en tenant compte de tous les modes.

Justifier que l'amplitude A_n des harmoniques doive décroître au moins en $1/n^2$; pour une corde « frappée » (corde de piano, par exemple), on trouve que A_n décroît en $1/n$: discuter ce résultat.