Dual topologique d'un espace ℓ^p. Exemples de parties compactes de ℓ^2

Dans tout le problème le corps de base des espaces vectoriels considérés est $\mathbb{C}$. Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, E' désigne l'espace des formes linéaires continues sur $(E, \|\cdot\|)$.

Partie I

[I] [S] **1)** On désigne par $\mathcal{B}$ la boule fermée unité de E, c'est à dire l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| \leqslant 1$. Montrer que l'on définit une norme $|||\cdot|||$ sur E' par la formule : $\forall\, x^* \in E'$, $|||x^*||| = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathcal{B}} |x^*(x)|$.

[I] [S] **2)** Dans toute la suite on considérera l'espace normé $(E', |||\cdot|||)$ qui sera simplement noté E' et appelé dual topologique de E.

a) Soit $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E'. Montrer que pour chaque x fixé dans E, la suite $\big(x_n^*(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{C}$. On associe ainsi, à chaque $x \in E$, un unique complexe $\lim_{n\to+\infty} x_n^*(x)$ que l'on note $x^*(x)$.

b) Montrer que l'application $x^* : E \longmapsto \mathbb{C}$ définie en a) est élément de E'.

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |||x_n^* - x^*||| = 0$.

[I] [S] **3)** Énoncer le résultat de portée générale démontré dans cette partie.

Partie II

Soit ℓ^1 l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ soit absolument convergente. On munit ℓ^1 de la norme définie par $\forall\, x^* \in \ell^1$, $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme définie par $\forall\, x^* \in \ell^\infty$, $\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de ℓ^∞ constitué des suites convergentes vers 0 et $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes nulles au delà d'un certain rang. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note δ_n l'élément de $\mathcal{P}$ défini par $\delta_n = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\delta_{nk} = 1$ si $n = k$ et 0 si $n \neq k$.

[I] [S] **1)** **a)** Vérifier les inclusions $\mathcal{P} \subset \ell^1 \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$.

b) Comparer sur ℓ^1 la norme $\|\cdot\|_1$ avec la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à ℓ^1.

c) Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

d) Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$.

e) $\mathcal{P}$ est-elle une partie dense de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?

[I] [S] **2)** Soit $\Phi : (\ell^1)' \longmapsto \ell^\infty$ l'application définie par $\forall\, x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) = \big(x^*(\delta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que l'application Φ est bien définie, c'est à dire que, pour tout $x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) \in \ell^\infty$.

b) Montrer que Φ est une application linéaire continue. Quelle est sa norme ?

c) Montrer que Φ est une isométrie, c'est à dire une bijection telle que $\forall\, x^* \in (\ell^1)'$, $\|\Phi(x^*)\|_\infty = |||x^*|||$.

d) Que déduisez vous de I.3 et II.2.c en ce qui concerne l'espace normé ℓ^∞ ?

e) Construire une isométrie $\Psi : \mathcal{C}_0' \longmapsto \ell^1$. Qu'en déduisez vous pour l'espace normé ℓ^1 ?

Partie III

p et q sont des réels de $]1\,,\,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Pour tout réel t positif on pose $t^p = \exp(p\ln t)$ si $t > 0$ et $t^0 = 1$. On note ℓ^p l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|^p$ soit convergente. On pose alors $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

[I] [S] **1) a)** Déduire de la convexité de l'exponentielle réelle que pour tout $(u\,,\,v) \in \mathbb{R}_+^2$, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}$ ·

b) En déduire que si $(x\,,\,y) \in \ell^p \times \ell^q$ vérifie $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, alors $z = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\|z\|_1 \leqslant 1$. En conclure que

$$\forall\,(x\,,\,y) \in \ell^p \times \ell^q\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n||y_n| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q\,.$$

Cette inégalité est dite inégalité de Hölder. Préciser le cas d'égalité.

c) Vérifier que $|x_n+y_n|^p \leqslant |x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}|x_n|+|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}|y_n|$ et déduire de l'inégalité de Hölder que si $(x\,,\,y) \in (\ell^p)^2$, alors $x+y \in \ell^p$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n+y_n|^p\right) \leqslant \big(\|x\|_p+\|y\|_p\big)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

d) En conclure que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ , et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p.

[I] [S] **2)** On donne ici deux réels tels que $1 < p < r$.

a) Montrer que $\ell^p \subset \ell^r$. Comparer sur ℓ^p la norme $\|\cdot\|_p$ avec la restriction de $\|\cdot\|_r$ à ℓ_p .

b) Montrer que ℓ^p et son complémentaire dans ℓ^r sont des parties denses de $(\ell^r, \|\cdot\|_r)$.

[I] [S] **3) a)** Soit $x^* \in (\ell^p)'$. On pose $\Phi_p(x^*) = \big(x^*(\delta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On note θ_n un argument de $x^*(\delta_n)$ et on considère les éléments de $\mathcal{P}$ définis par $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x^*(\delta_k)|^{\frac{q}{p}}\,\mathrm{e}^{-i\theta_k}\,\delta_k$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

En calculant $|x^*(X_n)|$ et en le majorant à l'aide de $|||x^*|||$, montrer que $\Phi_p(x^*) \in \ell^q$ et que $\|\Phi_p(x^*)\|_q \leqslant |||x^*|||$.

b) Montrer que Φ_p est une isométrie de $(\ell^p)'$ sur l^q .

c) Qu'en déduit-on pour le bidual topologique $(l^p)''$?

d) Quelle conclusion apporte I.3 pour tout espace ℓ^p quand $p \in [1, +\infty]$?

Partie IV

[I] [S] **1)** Montrer que la boule fermée unité $\mathcal{B}$ de ℓ^∞ n'est pas compacte.

[I] [S] **2)** Soit Q le sous-ensemble de ℓ^2 défini par $Q = \{x \in l^2 \mid \ |x_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\}$. Montrer que Q n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension finie de ℓ^2 et que Q est compact.

[I] [S] **3)** Soit $u \in \ell^\infty$ et $Q(u) = \{x \in \ell^2 \mid \ |x_n| \leqslant |u_n|\}$. Montrer que $Q(u)$ est compact si et seulement si $u \in \ell^2$.

♦ ♦
♦

Indications ou résultats

Partie I

[Q] **1)** Toute application linéaire continue est bornée sur la boule unité.

[Q] **2)** **a)** Vérifier que la suite $\big(x_n^*(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

b) Il suffit de prouver que x^* est linéaire et bornée sur la boule unité.

c) Montrer que la suite $\big(x_n^*(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport à $x \in \mathcal{B}$ vers $x^*(x)$.

[Q] **3)** Complétude du dual topologique d'un espace normé.

Partie II

[Q] **1)** **a)** Appliquer les définitions.

b) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1$ et utiliser les suites canoniques δ_k pour montrer que $\|\cdot\|_1$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$.

c) Montrer que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, la suite de terme général $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\delta_k \in \mathcal{P}$ converge vers x dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

d) Procéder comme en c) avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0$ et la suite de terme général $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\delta_k$.

e) Une limite uniforme d'une suite à valeurs dans $\mathcal{P}$ devrait converger vers 0. On justifiera donc une réponse négative.

[Q] **2)** **a)** $x^* \in (\ell^1)'$ est bornée sur $\mathcal{B}$, et $\delta_n \in \mathcal{B}$.

b) Montrer que l'application linéaire Φ est 1-Lipschitzienne puis, considérer l'élément remarquable x^* de $(\ell^1)'$ défini par $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, $x^*(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

c) Pour montrer que Φ conserve la norme utiliser II.1.c et II.2.b. Pour montrer que Φ est surjective, considérer pour chaque $u \in \ell^\infty$ la forme linéaire x^* sur ℓ^1 définie par $\forall\, x \in \ell^1$, $x^*(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_n$.

d) Tout espace isométrique à un espace complet est complet.

e) Considérer l'application $\Psi : \mathcal{C}'_0 \longmapsto \ell^1$ qui à $x^* \in \mathcal{C}'_0$ associe $\Psi(x^*) = \big(x^*(\delta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et procéder comme ci dessus pour montrer que c'est une isométrie.