

Dual topologique d'un espace ℓ^p . Exemples de parties compactes de ℓ^2

Dans tout le problème le corps de base des espaces vectoriels considérés est \mathbb{C} . Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, E' désigne l'espace des formes linéaires continues sur $(E, \|\cdot\|)$.

Partie I

- [I] [S] 1) On désigne par \mathcal{B} la boule fermée unité de E , c'est à dire l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| \leq 1$. Montrer que l'on définit une norme $\|\cdot\|$ sur E' par la formule : $\forall x^* \in E'$, $\|x^*\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} |x^*(x)|$.
- [I] [S] 2) Dans toute la suite on considérera l'espace normé $(E', \|\cdot\|)$ qui sera simplement noté E' et appelé dual topologique de E .
- a) Soit $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E' . Montrer que pour chaque x fixé dans E , la suite $(x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{C} . On associe ainsi, à chaque $x \in E$, un unique complexe $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^*(x)$ que l'on note $x^*(x)$.
- b) Montrer que l'application $x^* : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie en a) est élément de E' .
- c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n^* - x^*\| = 0$.
- [I] [S] 3) Énoncer le résultat de portée générale démontré dans cette partie.

Partie II

Soit ℓ^1 l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ soit absolument convergente. On munit ℓ^1 de la norme définie par $\forall x^* \in \ell^1$, $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées à valeurs dans \mathbb{C} , muni de la norme définie par $\forall x^* \in \ell^\infty$, $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. On note \mathcal{C}_0 le sous-espace de ℓ^∞ constitué des suites convergentes vers 0 et \mathcal{P} l'ensemble des suites complexes nulles au delà d'un certain rang. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note δ_n l'élément de \mathcal{P} défini par $\delta_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ où $\delta_{nk} = 1$ si $n = k$ et 0 si $n \neq k$.

- [I] [S] 1) a) Vérifier les inclusions $\mathcal{P} \subset \ell^1 \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$.
- b) Comparer sur ℓ^1 la norme $\|\cdot\|_1$ avec la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à ℓ^1 .
- c) Montrer que \mathcal{P} est une partie dense de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
- d) Montrer que \mathcal{P} est une partie dense de $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$.
- e) \mathcal{P} est-elle une partie dense de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?
- [I] [S] 2) Soit $\Phi : (\ell^1)' \rightarrow \ell^\infty$ l'application définie par $\forall x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) = (x^*(\delta_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- a) Vérifier que l'application Φ est bien définie, c'est à dire que, pour tout $x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) \in \ell^\infty$.

- b) Montrer que Φ est une application linéaire continue. Quelle est sa norme ?
- c) Montrer que Φ est une isométrie, c'est à dire une bijection telle que $\forall x^* \in (\ell^1)'$, $\|\Phi(x^*)\|_\infty = \|x^*\|$.
- d) Que déduisez vous de I.3 et II.2.c en ce qui concerne l'espace normé ℓ^∞ ?
- e) Construire une isométrie $\Psi : \mathcal{C}'_0 \longrightarrow \ell^1$. Qu'en déduisez vous pour l'espace normé ℓ^1 ?

Partie III

p et q sont des réels de $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout réel t positif on pose $t^p = \exp(p \ln t)$ si $t > 0$ et $t^0 = 1$. On note ℓ^p l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|^p$ soit convergente. On pose alors $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

- [I] [S] 1) a) Déduire de la convexité de l'exponentielle réelle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
- b) En déduire que si $(x, y) \in \ell^p \times \ell^q$ vérifie $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, alors $z = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\|z\|_1 \leq 1$. En conclure que

$$\forall (x, y) \in \ell^p \times \ell^q, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| |y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Cette inégalité est dite inégalité de Hölder. Préciser le cas d'égalité.

- c) Vérifier que $|x_n + y_n|^p \leq |x_n + y_n|^{\frac{p}{q}} |x_n| + |x_n + y_n|^{\frac{p}{q}} |y_n|$ et déduire de l'inégalité de Hölder que si $(x, y) \in (\ell^p)^2$, alors $x + y \in \ell^p$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \right) \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- d) En conclure que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ , et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .

- [I] [S] 2) On donne ici deux réels tels que $1 < p < r$.

- a) Montrer que $\ell^p \subset \ell^r$. Comparer sur ℓ^p la norme $\|\cdot\|_p$ avec la restriction de $\|\cdot\|_r$ à ℓ^p .
- b) Montrer que ℓ^p et son complémentaire dans ℓ^r sont des parties denses de $(\ell^r, \|\cdot\|_r)$.

- [I] [S] 3) a) Soit $x^* \in (\ell^p)'$. On pose $\Phi_p(x^*) = (x^*(\delta_n))_{n \in \mathbb{N}}$. On note θ_n un argument de $x^*(\delta_n)$ et on considère les éléments de \mathcal{P} définis par $X_n = \sum_{k=0}^n |x^*(\delta_k)|^{\frac{q}{p}} e^{-i\theta_k} \delta_k$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. En calculant $|x^*(X_n)|$ et en le majorant à l'aide de $\|x^*\|$, montrer que $\Phi_p(x^*) \in \ell^q$ et que $\|\Phi_p(x^*)\|_q \leq \|x^*\|$.

- b) Montrer que Φ_p est une isométrie de $(\ell^p)'$ sur ℓ^q .
- c) Qu'en déduit-on pour le bidual topologique $(\ell^p)''$?



d) Quelle conclusion apporte I.3 pour tout espace ℓ^p quand $p \in [1, +\infty]$?

Partie IV

[I] [S] 1) Montrer que la boule fermée unité \mathcal{B} de ℓ^∞ n'est pas compacte.

[I] [S] 2) Soit Q le sous-ensemble de ℓ^2 défini par $Q = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$. Montrer que Q n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension finie de ℓ^2 et que Q est compact.

[I] [S] 3) Soit $u \in \ell^\infty$ et $Q(u) = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq |u_n|\}$. Montrer que $Q(u)$ est compact si et seulement si $u \in \ell^2$.



Indications ou résultats

Partie I

- [Q] 1) Toute application linéaire continue est bornée sur la boule unité.
- [Q] 2) a) Vérifier que la suite $(x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
 b) Il suffit de prouver que x^* est linéaire et bornée sur la boule unité.
 c) Montrer que la suite $(x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport à $x \in \mathcal{B}$ vers $x^*(x)$.
- [Q] 3) Complétude du dual topologique d'un espace normé.

Partie II

- [Q] 1) a) Appliquer les définitions.
 b) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$ et utiliser les suites canoniques δ_k pour montrer que $\|\cdot\|_1$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$.
 c) Montrer que si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$, la suite de terme général $X_n = \sum_{k=0}^n x_k \delta_k \in \mathcal{P}$ converge vers x dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
 d) Procéder comme en c) avec $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0$ et la suite de terme général $X_n = \sum_{k=0}^n x_k \delta_k$.
 e) Une limite uniforme d'une suite à valeurs dans \mathcal{P} devrait converger vers 0. On justifiera donc une réponse négative.
- [Q] 2) a) $x^* \in (\ell^1)'$ est bornée sur \mathcal{B} , et $\delta_n \in \mathcal{B}$.
 b) Montrer que l'application linéaire Φ est 1-Lipschitzienne puis, considérer l'élément remarquable x^* de $(\ell^1)'$ défini par $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1, x^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.
 c) Pour montrer que Φ conserve la norme utiliser II.1.c et II.2.b. Pour montrer que Φ est surjective, considérer pour chaque $u \in \ell^\infty$ la forme linéaire x^* sur ℓ^1 définie par $\forall x \in \ell^1, x^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_n$.
 d) Tout espace isométrique à un espace complet est complet.
 e) Considérer l'application $\Psi : \mathcal{C}'_0 \mapsto \ell^1$ qui à $x^* \in \mathcal{C}'_0$ associe $\Psi(x^*) = (x^*(\delta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et procéder comme ci dessus pour montrer que c'est une isométrie.