CH.32 : ONDES MECANIQUES

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

CH.32 : ONDES MECANIQUES 1
I. EQUATION D' ONDE A UNE DIMENSION : EXEMPLE D' UNE CORDE VIBRANTE. 2
I.1. HYPOTHESES DE TRAVAIL 2
I.2. MISE EN EQUATION 2
II. EQUATION D' ONDE A 3 DIMENSIONS : ONDES SONORES DANS UN FLUIDE. 3
II.1. MISE EN EQUATION 3
II.1.1. Hypothèses ; approximation acoustique 3
II.1.2. Linéarisation des équations utilisées 3
II.1.3. Equation de propagation 4
II.2. ONDES SONORES PLANES PROGRESSIVES 5
II.2.1. O.P.P.M en notation complexe 5
II.2.2. Structure d'une onde sonore plane progressive 5
II.3. ETUDE ENERGETIQUE DES ONDES SONORES 5
II.3.1. Vecteur densité surfacique de puissance sonore 5
II.3.2. Equation de conservation locale de l'énergie sonore 6
II.3.3. Interprétation macroscopique 6
II.3.4. Cas d'une onde plane progressive 6
II.3.5. Intensité acoustique 7
II.4. REFLEXION ET TRANSMISSION D' UNE O.P.P SONORE 7
II.4.1. Coefficients de réflexion et de transmission des amplitudes 7
II.4.2. Coefficients de réflexion et de transmission des puissances 8
III. ONDES STATIONNAIRES A UNE DIMENSION 9
III.1. RAPPELS 9
III.2. MODES PROPRES D' UNE CORDE FIXEE A SES DEUX EXTREMITES 9
IV. ANALYSE EN SERIE DE FOURIER 10
IV.1. THEOREME DE FOURIER 10
IV.2. THEOREME DE PARSEVAL 10
IV.3. ROLE DES SYMETRIES 11
IV.3.1. Symétrie de glissement 11
IV.3.2. Fonction impaire 11
IV.3.3. Fonction paire 11
IV.4. EXEMPLES 11
IV.4.1. Signal carré 11
IV.4.2. Signal triangulaire 11

****

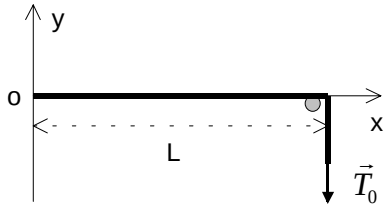
Préambule : ce cours reprend les notions introduites à propos des ondes électromagnétiques (chapitre 29) ; il les adapte à deux exemples d'ondes mécaniques : propagation d'un ébranlement le long d'une corde et d'une onde sonore dans un fluide.
Il convient absolument de traiter les exercices de ce chapitre, notamment ceux concernant les ressorts et les chaînes d'atomes : on y soulèvera le problème de la nature **discontinue** du **milieu de propagation** et l'on verra la condition permettant de faire l'hypothèse d'un milieu quasi-continu.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

I. EQUATION D' ONDE A UNE DIMENSION : EXEMPLE D' UNE CORDE VIBRANTE.

I.1. HYPOTHESES DE TRAVAIL

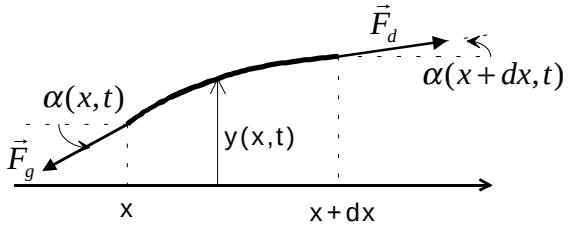


La corde est de masse linéique: $\mu = \dfrac{dm}{dL}$

La tension est suffisamment importante pour que la corde, au repos , puisse être considérée comme pratiquement **horizontale** : puisque seuls les écarts par rapport à cette position nous intéressent , nous **négligerons le rôle du poids** dans ce problème.

- L'onde **physique** qui va se propager est caractérisée par la grandeur **mathématique** $y(x,t)$ qui représente l'élongation d'un point de la corde par rapport à sa position de repos ; on suppose que : $\boxed{|y(x,t)| \ll L}$ et $\boxed{|\partial y / \partial x| \ll 1}$ (la tangente à la corde fait un angle petit avec Ox)
- La corde est **inextensible** ; elle est tendue par une force $\vec{T}_0$, de module noté T_0.
- La corde est **sans raideur** ou **infiniment souple** : elle est telle qu'un moment de force aussi petit que l'on veut suffit à la courber (lorsqu'elle n'est pas tendue) ⇒ l'action d'un élément de corde dL sur un élément voisin est une force (dont le **module** est appelé « **tension** » de la corde) portée par la **tangente** à la corde au point considéré.
- Les D.L seront menés au **1er ordre** par rapport aux infiniment petits tels que $\partial y / \partial x$.

I.2. MISE EN EQUATION



Nous allons appliquer le PFD à un élément de corde de longueur dL.
Puisque le poids est négligé , les seules forces à prendre en compte sont celles exercées par les parties de la corde situées à gauche et à droite de l'élément choisi (respectivement $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$)

- La masse de l'élément de corde vaut : $dm = \mu dL = \mu\sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu dx \times \sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2} \approx \mu dx$
- Les termes en $\dfrac{\partial^2 x_M}{\partial t^2}$ sont du **2nd ordre** par rapport aux termes en $\dfrac{\partial^2 y_M}{\partial t^2}$ (les variations d'ordonnée d'un point M de la corde sont en $\sin(d\alpha) \approx d\alpha$, alors que les variations d'abscisse sont en $1 - \cos(d\alpha) \approx (d\alpha)^2 / 2$) ⇒ on considérera que les points de la corde n'effectuent que des mouvements **selon l'axe Oy**.

Rq : à ce stade, il convient de ne pas confondre dx_M = variation d'abscisse d'un point M **particulier** de la corde avec dx = différence d'abscisse (à un instant t donné) entre 2 points **différents** de la corde (dans la relation $|\partial y / \partial x| \ll 1$, il s'agit bien de ∂x et non de ∂x_M ...).

- Compte tenu des remarques précédentes, le PFD projeté sur les axes Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} 0 = F_{g,x} + F_{d,x} & (1) \\ \mu dx \times \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F_{g,y} + F_{d,y} & (2) \end{cases}$$

(où toutes les grandeurs sont en **valeur algébrique**)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

• Rappelons que la tension en un point de la corde est un module ; avec une orientation angulaire trigonométrique, il vient :

$F_{g,x} = -T(x,t)\cos\alpha(x,t)$; $F_{d,x} = T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t)$ et :

$F_{g,y} = -T(x,t)\sin\alpha(x,t)$; $F_{d,y} = T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t)$.

La relation (1) fournit donc : $d[T(x,t)\cos\alpha(x,t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x,t)\cos\alpha(x,t) = cste = T_0}$

La relation (2) conduit à : $\mu\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial(T\sin\alpha)}{\partial x} = T_0\dfrac{\partial(\tan\alpha)}{\partial x}$; or : $\tan\alpha = \partial y/\partial x \Rightarrow$

$\boxed{\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\times\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$ avec : $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}}$ (équation d'onde de D'Alembert, de célérité c)

• L'équation étant ici à **une dimension**, la solution la plus générale pourra s'écrire :

$\boxed{y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$ où f et g sont des **ondes planes et progressives**.
(f se propage selon les x croissants, g selon les x décroissants).

II. EQUATION D' ONDE A 3 DIMENSIONS : ONDES SONORES DANS UN FLUIDE.

II.1. MISE EN EQUATION

II.1.1. Hypothèses ; approximation acoustique

• Le fluide est **parfait** (toutes les causes d'irréversibilité sont négligées).
• Les seules forces prises en compte sont les **forces de pression** (la pesanteur est négligée).
• Au repos, les champs de masse volumique $\mu_0(M,t)$ et de pression $P_0(M,t)$ sont **uniformes** ; le champ des vitesses, quant à lui, est **nul**.
• L'onde sonore est une perturbation de cet état de repos, que nous représenterons par des champs de la forme : $\vec{v}(M,t)$; $P(M,t) = P_0 + p(M,t)$; $\mu_T(M,t) = \mu_0 + \mu(M,t)$

Rq1 : $p(M,t)$ est appelée **« surpression acoustique »**

Rq2 : dans la plupart des cas, nous pourrons prendre $\langle\vec{v}(M,t)\rangle_t = \vec{0}$ et $\langle p(M,t)\rangle_t = 0$.

• **Approximation acoustique :** les grandeurs $\|\vec{v}\|$, p et μ seront des infiniment petits de même ordre (ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles) ; les calculs seront menés **à l'ordre 1** en ces infiniment petits.

II.1.2. Linéarisation des équations utilisées

• équation d'Euler : $\mu_T[\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}] = -\overrightarrow{grad}P \Rightarrow (\mu_0+\mu)[\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}] = -\overrightarrow{grad}(P_0+p)$

or : $\mu\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ et $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$ sont des termes du second ordre ; de plus P_0 est constant $\Rightarrow$ il vient :

$$\boxed{\mu_0\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,p(M,t)} \qquad (1)$$

• équation de conservation de la masse : $div[(\mu_0+\mu)\vec{v}] + \dfrac{\partial(\mu_0+\mu)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\mu_0 div\vec{v} + \dfrac{\partial\mu}{\partial t} = 0}$ (2)

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

• <u>nature isentropique de l'évolution</u> : ceci est lié à la première hypothèse du paragraphe II.1.1 ; on exprime alors le coefficient de compressibilité isentropique :

$\chi_S = -\frac{1}{V}\times\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_S = \frac{1}{\mu_T}\times\left.\frac{\partial \mu_T}{\partial P}\right|_S = \frac{1}{(\mu_0+\mu)}\times\left.\frac{\partial \mu_T}{\partial P}\right|_S = \frac{1}{\mu_0(1+\mu/\mu_0)}\times\left.\frac{\partial \mu_T}{\partial P}\right|_S$; nous allons confondre $\partial\mu_T$ avec μ et ∂P avec p ; au 1er ordre, il faudrait écrire : $\frac{1}{\mu_0(1+\mu/\mu_0)} \approx \frac{1}{\mu_0}\times(1-\mu/\mu_0)$; mais, comme nous le verrons plus loin, χ_S sera en facteur d'un terme du 1er ordre $\Rightarrow$ il suffit de l'exprimer à l'ordre zéro, ce qui conduit à : $\chi_S = \frac{1}{\mu_0}\times\frac{\mu}{p}$ ou $\boxed{\mu(M,t) = \mu_0\chi_S \times p(M,t)}$ (3)

II.1.3. Equation de propagation

• On élimine μ entre (2) et (3) $\Rightarrow$ $div\vec{v} = -\chi_S\frac{\partial p}{\partial t}$ (4) ; on dérive (4), on prend la divergence de (1), on permute les opérateurs div et $\frac{\partial}{\partial t}$ (opérateurs linéaires et variables de temps et d'espace indépendantes), on remarque que $div(\overrightarrow{grad}) = \Delta$, pour obtenir en final :

$\boxed{\Delta p(M,t) - \frac{1}{c^2}\times\frac{\partial^2 p(M,t)}{\partial t^2} = 0}$ avec : $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}}$ (équation d'onde de D'Alembert, de célérité c)

• En prenant le gradient de (4) et en dérivant (1) par rapport au temps, il vient :

$$-\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \frac{1}{\chi_S}\overrightarrow{grad}(div\vec{v}) = \frac{1}{\chi_S}[\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{v}) + \Delta\vec{v}] = \mu_0\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}$$

♦ très souvent, nous aurons un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$

♦ sinon, on prend le rotationnel de (1) $\Rightarrow$ $\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{v}) = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,p) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{rot}\vec{v}$ est indépendant du temps ; par ailleurs, nous avons : $\langle\vec{v}\rangle_t = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{rot}[\langle\vec{v}\rangle_t] = \vec{0} \Rightarrow \langle\overrightarrow{rot}\vec{v}\rangle_t = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0},\ \forall t}$ $\Rightarrow$ avec nos hypothèses, l'écoulement associé à des ondes sonores est **irrotationnel** ; dans ces conditions, le champ des vitesses satisfait à une équation de propagation vectorielle, soit :

$\boxed{\Delta\vec{v}(M,t) - \frac{1}{c^2}\times\frac{\partial^2\vec{v}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}}$ avec : $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}}$

Rq1 : on obtiendrait une équation du même type pour $\mu(M,t)$, mais on l'utilise rarement car les **conditions aux limites** portent en général sur P et $\vec{v}$.

Rq2 : pour un gaz parfait en évolution **isentropique**, l'équation de Laplace permet d'écrire :

$\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\mu_T}{\mu_T} = 0 \Rightarrow \chi_S = \frac{1}{\gamma P} \approx \frac{1}{\gamma P_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c \approx \sqrt{\gamma\frac{P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}}$ (T_0 = température du gaz au repos)

<u>Application numérique</u> : pour l'air ($\gamma = 1{,}4$ et $M = 29 g.mol^{-1}$), à 293K : $\boxed{c = 343 m/s}$ (signalons que pour l'eau, $c \approx 1500 m/s$; pour les métaux, $c = qques\ 1000\ m/s$).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.