III Éléments algébriques d'une algèbre sur un corps commutatif

III.1 Polynôme minimal d'un élément d'une algèbre de dimension finie

Soit K un corps commutatif et E une K-algèbre. Pour un élément donné a de E on considère l'application $\Phi_a : K[X] \longmapsto E$ de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur K vers E, qui à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ associe l'élément de E obtenu en remplaçant l'indéterminée X par a : $\Phi_a(P) = \widetilde{P}(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$. On vérifie que Φ_a est un morphisme de K-algèbres.

- L'image de Φ_a est la plus petite sous-algèbre de E contenant $K \cup \{a\}$: elle est notée $K[a]$. C'est aussi le sous-K-espace vectoriel de E engendré par $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
- Le noyau de Φ_a est l'idéal de l'anneau $K[X]$ constitué des polynômes P annulant a. Lorsqu'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ annulant a on dit que a est algébrique sur K, sinon on dit que a est transcendant sur K. On a donc les équivalences

$$a \text{ est transcendant sur K} \iff \operatorname{Ker}\Phi_a = \{0\} \iff \Phi_a \text{ est injectif}.$$

- Si $K[a]$ (ou E) est de dimension finie en tant que K-espace vectoriel, alors Φ_a n'est pas injectif (puisque $K[X]$ est de dimension infinie) et a est algébrique sur K.
  Inversement, si a est algébrique sur K, il existe un polynôme non nul P de $K[X]$ de degré d tel que $\Phi_a(P) = \widetilde{P}(a) = 0$. Pour tout $b \in K[a]$ il existe $Q \in K[X]$ tel que $b = \widetilde{Q}(a)$. En effectuant la division euclidienne de Q par le polynôme non nul P, on peut écrire $Q = DP + R$ où D et R sont dans $K[X]$ et $d^\circ R < d$. Alors $b = \widetilde{Q}(a) = \widetilde{D}(a)\widetilde{P}(a) + \widetilde{R}(a) = \widetilde{R}(a)$. Ainsi b appartient au K-espace $K_{d-1}[a]$ engendré par $a^0 = 1_E, a, \cdots, a^{d-1}$. Dès lors $K[a] = K_{d-1}[a]$ est de dimension finie au plus d. On a donc la caractérisation suivante des éléments algébriques :

Théorème

> Pour tout élément a d'une K-algèbre :
>
> $$a \text{ est algébrique sur } K \iff \text{la } K\text{-algèbre } \operatorname{Im}\Phi_a = K[a] \text{ est de dimension finie.}$$

Lorsque a est algébrique sur K, l'idéal *non nul* $\operatorname{Ker}\Phi_a$ de l'anneau euclidien $K[X]$ est de la forme $K[X]P_a$ où P_a est l'unique polynôme unitaire de degré minimum parmi ceux des polynômes unitaires annulant a. On dit que P_a *est le polynôme minimal de* a. La preuve précédente montre que le degré d_a de P_a est la dimension de $K[a]$ et plus précisément la famille $(a^k)_{k\in[\![0,d_a-1]\!]}$ est une base de $K[a]$.

- Si a est un élément algébrique d'une algèbre *intègre* E, le polynôme minimal P_a de a est *irréductible* en produit de polynômes de degré strictement inférieur à $d_a = d^\circ P_a$, si bien que P_a est premier dans l'anneau euclidien $K[X]$.