

III Éléments algébriques d'une algèbre sur un corps commutatif

III.1 Polynôme minimal d'un élément d'une algèbre de dimension finie

Soit K un corps commutatif et E une K -algèbre. Pour un élément donné a de E on considère l'application $\Phi_a : K[X] \mapsto E$ de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur K vers E ,

qui à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ associe l'élément de E obtenu en remplaçant l'indéterminée

X par a : $\Phi_a(P) = \tilde{P}(a) = \sum_{k=0}^n a_k a^k$. On vérifie que Φ_a est un morphisme de K -algèbres.

- ☞ L'image de Φ_a est la plus petite sous-algèbre de E contenant $K \cup \{a\}$: elle est notée $K[a]$. C'est aussi le sous- K -espace vectoriel de E engendré par $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- ☞ Le noyau de Φ_a est l'idéal de l'anneau $K[X]$ constitué des polynômes P annulant a . Lorsqu'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ annulant a on dit que a est algébrique sur K , sinon on dit que a est transcendant sur K . On a donc les équivalences

$$a \text{ est transcendant sur } K \iff \text{Ker } \Phi_a = \{0\} \iff \Phi_a \text{ est injectif.}$$

- ☞ Si $K[a]$ (ou E) est de dimension finie en tant que K -espace vectoriel, alors Φ_a n'est pas injectif (puisque $K[X]$ est de dimension infinie) et a est algébrique sur K .

Inversement, si a est algébrique sur K , il existe un polynôme non nul P de $K[X]$ de degré d tel que $\Phi_a(P) = \tilde{P}(a) = 0$. Pour tout $b \in K[a]$ il existe $Q \in K[X]$ tel que $b = \tilde{Q}(a)$. En effectuant la division euclidienne de Q par le polynôme non nul P , on peut écrire $Q = DP + R$ où D et R sont dans $K[X]$ et $d^\circ R < d$. Alors $b = \tilde{Q}(a) = \tilde{D}(a)\tilde{P}(a) + \tilde{R}(a) = \tilde{R}(a)$. Ainsi b appartient au K -espace $K_{d-1}[a]$ engendré par $a^0 = 1_E, a, \dots, a^{d-1}$. Dès lors $K[a] = K_{d-1}[a]$ est de dimension finie au plus d . On a donc la caractérisation suivante des éléments algébriques :

Théorème

|| Pour tout élément a d'une K -algèbre :

$$a \text{ est algébrique sur } K \iff \text{la } K\text{-algèbre } \text{Im } \Phi_a = K[a] \text{ est de dimension finie.}$$

Lorsque a est algébrique sur K , l'idéal *non nul* $\text{Ker } \Phi_a$ de l'anneau euclidien $K[X]$ est de la forme $K[X]P_a$ où P_a est l'unique polynôme unitaire de degré minimum parmi ceux des polynômes unitaires annulant a . On dit que P_a est le *polynôme minimal* de a . La preuve précédente montre que le degré d_a de P_a est la dimension de $K[a]$ et plus précisément la famille $(a^k)_{k \in [0, d_a-1]}$ est une base de $K[a]$.

- Si a est un élément algébrique d'une algèbre *intègre* E , le polynôme minimal P_a de a est *irréductible* en produit de polynômes de degré strictement inférieur à $d_a = d^\circ P_a$, si bien que P_a est premier dans l'anneau euclidien $K[X]$.