

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

On se donne deux droites distinctes \mathcal{D} et \mathcal{D}' du plan.

Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts : A, B, C sur \mathcal{D} et A', B', C' sur \mathcal{D}' .

On suppose que $(AA') \parallel (BB')$.

Montrer que $(AA') \parallel (CC')$ si et seulement si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ (*Théorème de Thalès*).

EXERCICE 2 [Corrigé]

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

On se donne A', B', C' respectivement sur $(BC), (AC), (AB)$ et distincts de A, B, C .

Montrer que A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ (*Théorème de Menelaüs*).

EXERCICE 3 [Corrigé]

On considère trois droites $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ passant respectivement par trois A, B, C non alignés.

On suppose que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ coupent respectivement les droites $(BC), (CA), (AB)$ en A', B', C' .

Montrer que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ sont parallèles ou concourantes $\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Ceva*.

EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne deux droites affines distinctes \mathcal{D} et \mathcal{D}' du plan.

Soient A, B, C trois points distincts de \mathcal{D} , et A', B', C' trois points distincts de \mathcal{D}' .

Montrer que si $\begin{cases} (AB') \parallel (BA') \\ (BC') \parallel (CB') \end{cases}$ alors alors $(CA') \parallel (AC')$ (*Théorème de Pappus*).

EXERCICE 5 [Corrigé]

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan, sans sommets communs.

On suppose que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.

Montrer que $(AC) \parallel (A'C') \Leftrightarrow (AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes.

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Desargues*.

Corrigés des exercices

 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Supposons que \mathcal{D} et \mathcal{D}' soient concourantes en I .

Soit h l'homothétie de centre I telle que $h(A) = B$.

Le point $h(A')$ est sur la droite (IA') (cette droite est globalement invariante par h) et il est sur la parallèle à (AA') menée par B (une homothétie transforme une droite en une droite parallèle.)

Ainsi $h(A') \in (IA') \cap (BB')$, donc $h(A') = B'$.

On en déduit $\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}$ (c'est le rapport de h .)

Il en découle $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IB'} - \overline{IA'}}{\overline{IB} - \overline{IA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

– Supposons $(CC') \parallel (AA')$. Comme ci-dessus, on trouve $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$.

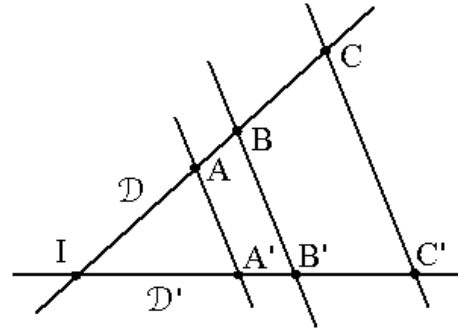
Ainsi $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ donc $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

– Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. Soit C'' à l'intersection de (IA) et de la parallèle à (AA') menée de C .

En utilisant le sens direct, on trouve l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$.

Ainsi $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$ donc $C' = C''$, donc $(CC') \parallel (AA')$.

– Remarque : on a supposé $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ concourantes. Si elles sont parallèles, on reprend la même démonstration, mais en remplaçant l'homothétie h par la translation de vecteur $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.


 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Première démonstration (en utilisant des barycentres)

Il existe des réels α, β, γ , différents de 0 et de 1, tels que :

$$A' = \alpha B + (1-\alpha)C, \quad B' = \beta C + (1-\beta)A, \quad C' = \gamma A + (1-\gamma)B.$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} \overline{A'B'} = -\alpha \overline{AB} + (\alpha + \beta - 1) \overline{AC} \\ \overline{A'C'} = (1 - \alpha - \gamma) \overline{AB} + (\alpha - 1) \overline{AC} \end{cases}$$

On en déduit, dans la base canonique :

$$\begin{aligned} \det(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) &= (\alpha(1-\alpha) + (\alpha+\beta-1)(\alpha+\gamma-1)) \det(\overline{AB}, \overline{AC}) \\ &= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) \det(\overline{AB}, \overline{AC}). \end{aligned}$$

On a alors : A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \det(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

On a aussi $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\beta-1}{\beta}$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$.

Donc $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

On est arrivé à la même condition, ce qui démontre le théorème.

