Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

On se donne deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan.

Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts : A, B, C sur $\mathcal{D}$ et A', B', C' sur $\mathcal{D}'$.

On suppose que $(AA') \parallel (BB')$.

Montrer que $(AA') \parallel (CC')$ si et seulement si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ *(Théorème de Thalès).*

Exercice 2 [Corrigé]

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

On se donne A', B', C' respectivement sur $(BC), (AC), (AB)$ et distincts de A, B, C.

Montrer que A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ *(Théorème de Menelaüs.)*

Exercice 3 [Corrigé]

On considère trois droites $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ passant respectivement par trois A, B, C non alignés.

On suppose que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ coupent respectivement les droites $(BC), (CA), (AB)$ en A', B', C'.

Montrer que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ sont parallèles ou concourantes $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Ceva.*

Exercice 4 [Corrigé]

On se donne deux droites affines disctinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan.

Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{D}$, et A', B', C' trois points distincts de $\mathcal{D}'$.

Montrer que si $\begin{cases} (AB') \parallel (BA') \\ (BC') \parallel (CB') \end{cases}$ alors alors $(CA') \parallel (AC')$ *(Théorème de Pappus).*

Exercice 5 [Corrigé]

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan, sans sommets communs.

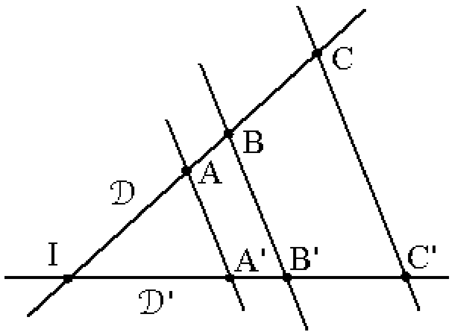
On suppose que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.

Montrer que $(AC) \parallel (A'C') \Leftrightarrow (AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes.

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Desargues.*

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]



Supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient concourantes en I.

Soit h l'homothétie de centre I telle que $h(A) = B$.

Le point $h(A')$ est sur la droite (IA') (cette droite est globalement invariante par h) et il est sur la parallèle à (AA') menée par B (une homothétie transforme une droite en une droite parallèle.)

Ainsi $h(A') \in (IA') \cap (BB')$, donc $h(A') = B'$.

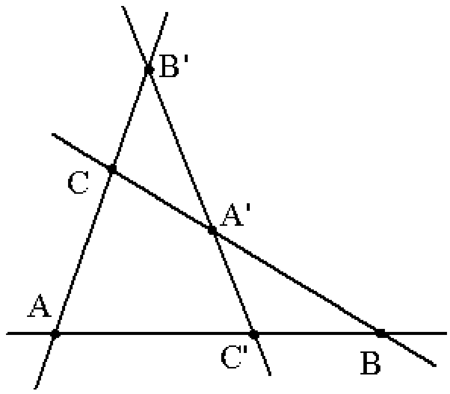
On en déduit $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}$ (c'est le rapport de h.)

Il en découle $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = \dfrac{\overline{IB'} - \overline{IA'}}{\overline{IB} - \overline{IA}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

- Supposons $(CC') \parallel (AA')$. Comme ci-dessus, on trouve $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$.
  Ainsi $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ donc $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.
- Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. Soit C'' à l'intersection de (IA) et de la parallèle à (AA') menée de C.
  En utilisant le sens direct, on trouve l'égalité $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$.
  Ainsi $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$ donc $C' = C''$, donc $(CC') \parallel (AA')$.
- Remarque : on a supposé $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ concourantes. Si elles sont parallèles, on reprend la même démonstration, mais en remplaçant l'homothétie h par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Première démonstration (en utilisant des barycentres)



Il existe des réels α, β, γ, différents de 0 et de 1, tels que :

$A' = \alpha B + (1-\alpha)C,\ B' = \beta C + (1-\beta)A,\ C' = \gamma A + (1-\gamma)B.$

On en déduit $\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = -\alpha\overrightarrow{AB} + (\alpha+\beta-1)\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'C'} = (1-\alpha-\gamma)\overrightarrow{AB} + (\alpha-1)\overrightarrow{AC} \end{cases}$

On en déduit, dans la base canonique :

$\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

$= (\alpha(1-\alpha) + (\alpha+\beta-1)(\alpha+\gamma-1)) \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

On a alors : A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

On a aussi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$, $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\beta-1}{\beta}$ et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}$.

Donc $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta} \cdot \dfrac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

On est arrivé à la même condition, ce qui démontre le théorème.