Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

Soit H un point du plan d'un triangle ABC.
Soient A', B', C' les symétriques de H par rapport aux milieux de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$.
Montrer que les droites (A,A'), (B,B'), (C,C') sont concourantes en un point K situé sur la droite joignant H à l'équibarycentre G du triangle ABC.

EXERCICE 2 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un quadrilatère $ABCD$ "non croisé".
On note $A'B'C'D'$ le quadrilatère joignant les isobarycentres de BCD, CDA, DAB, ABC.
Comment le quadrilatère $A'B'C'D'$ se déduit-il du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 3 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un parallélogramme $ABCD$.
Soient I le milieu de AB et J celui de AD.
Montrer que les droites (IC) et (JC) divisent la diagonale $[B,D]$ en trois parties égales.

EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne n points $A_1, \ldots, A_n$, avec $n \geq 2$.
Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, soit G_k l'équibarycentre des $(A_j)_{j \neq k}$.
Montrer qu'on a l'égalité $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_k G_k} = \overrightarrow{0}$.

EXERCICE 5 [Corrigé]

On se donne un triangle ABC du plan, et des points A', B', C' sur $(BC), (AC), (AB)$.
On suppose que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont sécantes en un point M.
Montrer que $\dfrac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \dfrac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \dfrac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1$ (théorème de Gergonne.)

EXERCICE 6 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un quadrilatère $ABCD$ "non croisé".
Montrer que les sept droites suivantes sont concourantes en un même point (lequel ?) :
- Les quatres droites joignant un sommet à l'isobarycentre des trois autres sommets.
- Les deux droites joignant les milieux de deux cotés opposés.
- La droite joignant les milieux des deux diagonales.

EXERCICE 7 [Corrigé]

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Soit M un point quelconque.
On pose $\lambda_A = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $\lambda_B = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $\lambda_C = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

1. Montrer que $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C \neq 0$.
2. Montrer que M est le barycentre de $(A, \lambda_A), (B, \lambda_B), (C, \lambda_C)$.
3. Qu'obtient-on pour le centre Ω du cercle circonscrit à ABC ?
4. Que peut-on dire également concernant le centre de gravité du triangle ABC ?
5. Qu'obtient-on enfin concernant le centre du cercle inscrit au triangle ABC ?