

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

Soit H un point du plan d'un triangle ABC .

Soient A', B', C' les symétriques de H par rapport aux milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$.

Montrer que les droites (A, A') , (B, B') , (C, C') sont concourantes en un point K situé sur la droite joignant H à l'équibarycentre G du triangle ABC .

EXERCICE 2 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un quadrilatère $ABCD$ "non croisé".

On note $A'B'C'D'$ le quadrilatère joignant les isobarycentres de BCD, CDA, DAB, ABC .

Comment le quadrilatère $A'B'C'D'$ se déduit-il du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 3 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un parallélogramme $ABCD$.

Soient I le milieu de AB et J celui de AD .

Montrer que les droites (IC) et (JC) divisent la diagonale $[B, D]$ en trois parties égales.

EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne n points A_1, \dots, A_n , avec $n \geq 2$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, soit G_k l'équibarycentre des $(A_j)_{j \neq k}$.

Montrer qu'on a l'égalité $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_k G_k} = \vec{0}$.

EXERCICE 5 [Corrigé]

On se donne un triangle ABC du plan, et des points A', B', C' sur $(BC), (AC), (AB)$.

On suppose que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont sécantes en un point M .

Montrer que $\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{B'B} + \frac{C'M}{C'C} = 1$ (théorème de Gergonne.)

EXERCICE 6 [Corrigé]

Dans le plan, on se donne un quadrilatère $ABCD$ "non croisé".

Montrer que les sept droites suivantes sont concourantes en un même point (lequel?) :

- Les quatre droites joignant un sommet à l'isobarycentre des trois autres sommets.
- Les deux droites joignant les milieux de deux cotés opposés.
- La droite joignant les milieux des deux diagonales.

EXERCICE 7 [Corrigé]

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Soit M un point quelconque.

On pose $\lambda_A = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $\lambda_B = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $\lambda_C = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

1. Montrer que $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C \neq 0$.
2. Montrer que M est le barycentre de $(A, \lambda_A), (B, \lambda_B), (C, \lambda_C)$.
3. Qu'obtient-on pour le centre Ω du cercle circonscrit à ABC ?
4. Que peut-on dire également concernant le centre de gravité du triangle ABC ?
5. Qu'obtient-on enfin concernant le centre du cercle inscrit au triangle ABC ?