

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Corrigé](#)]

Donner la valeur de $y = 2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ pour $x = \frac{1}{2} \ln 3$.

EXERCICE 2 [[Corrigé](#)]

Exprimer $y = \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x$ à l'aide de l'exponentielle.

EXERCICE 3 [[Corrigé](#)]

Simplifier le produit $P_n(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

EXERCICE 4 [[Corrigé](#)]

Calculer la somme $A_n(x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch}(x + 2h) + \cdots + \operatorname{ch}(x + 2nh)$.

EXERCICE 5 [[Corrigé](#)]

Résoudre l'équation $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a + x) + \operatorname{sh}(a + 2x) + \operatorname{sh}(a + 3x) = 0$.

EXERCICE 6 [[Corrigé](#)]

Simplifier l'expression $A_n(x) = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \cdots + n \operatorname{ch} nx$.

EXERCICE 7 [[Corrigé](#)]

Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = \sin x \operatorname{sh} x$.

EXERCICE 8 [[Corrigé](#)]

Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$.

EXERCICE 9 [[Corrigé](#)]

Vérifier l'égalité $|\arctan \operatorname{sh} x| = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ pour tout x de \mathbb{R} .

EXERCICE 10 [[Corrigé](#)]

Montrer que la tangente en un point M de la courbe $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ est parallèle à l'une des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = a^2$, menée de la projection P de M sur Oy .

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On a : $y = 2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^x + e^{-x} - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$.

Or $x = \ln \sqrt{3}$ donc $e^x = \sqrt{3}$ et $e^{-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $y = \sqrt{3}$.

On confirme avec Maple :

> `y:=2*cosh(x)-sinh(x);`

$$y := 2 \operatorname{cosh}(x) - \operatorname{sinh}(x)$$

> `convert(eval(y,x=ln(sqrt(3))),exp);`

$$\sqrt{3}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x = \operatorname{ch}^3 x (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + \operatorname{sh}^3 x (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &= (\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x) e^x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x) e^x \\ &= (\operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x) e^{2x} = \frac{1}{4} (e^{2x} + 3e^{-2x}) e^{2x} = \frac{1}{4} (e^{4x} + 3) \end{aligned}$$

Voici une autre méthode :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2 + 2 \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 2x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x = 1 + \frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{4} (e^{4x} + 3) \end{aligned}$$

On confirme avec Maple :

> `y:=cosh(x)^4+cosh(x)^3*sinh(x)+sinh(x)^3*cosh(x)+sinh(x)^4;`

$$y := (\operatorname{cosh}(x))^4 + (\operatorname{cosh}(x))^3 \operatorname{sinh}(x) + (\operatorname{sinh}(x))^3 \operatorname{cosh}(x) + (\operatorname{sinh}(x))^4$$

> `simplify(convert(y,exp));`

$$1/4 e^{4x} + 3/4$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$P_n(x) \operatorname{sh} \frac{x}{2^n} = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^{n-1}} \left(\operatorname{sh} \frac{x}{2^n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} \right) = \frac{1}{2} P_{n-1}(x) \operatorname{sh} \frac{x}{2^{n-1}}$$

Par une récurrence évidente : $P_n(x) \operatorname{sh} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} P_1(x) \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{1}{2^n} \operatorname{sh} x$.

Ainsi $P_n(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}}$. Comme $\operatorname{sh} \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ quand $n \rightarrow \infty$ on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = 1$.