Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Donner la valeur de $y = 2\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x$ pour $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 2 [Corrigé]

Exprimer $y = \mathrm{ch}^4 x + \mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}^3 x + \mathrm{sh}^4 x$ à l'aide de l'exponentielle.

Exercice 3 [Corrigé]

Simplifier le produit $P_n(x) = \mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2} \cdot \mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2^2} \cdots \mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$.

Exercice 4 [Corrigé]

Calculer la somme $A_n(x) = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,(x+2h) + \cdots + \mathrm{ch}\,(x+2nh)$.

Exercice 5 [Corrigé]

Résoudre l'équation $\mathrm{sh}\,a + \mathrm{sh}\,(a+x) + \mathrm{sh}\,(a+2x) + \mathrm{sh}\,(a+3x) = 0$.

Exercice 6 [Corrigé]

Simplifier l'expression $A_n(x) = \mathrm{ch}\,x + 2\,\mathrm{ch}\,2x + \cdots + n\,\mathrm{ch}\,nx$.

Exercice 7 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \sin x\,\mathrm{sh}\,x$.

Exercice 8 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \mathrm{e}^{x\,\mathrm{ch}\,a}\,\mathrm{ch}\,(x\,\mathrm{sh}\,a)$.

Exercice 9 [Corrigé]

Vérifier l'égalité $|\arctan \mathrm{sh}\,x| = \arccos \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [Corrigé]

Montrer que la tangente en un point M de la courbe $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ est parallèle à l'une des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = a^2$, menée de la projection P de M sur Oy.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On a : $y = 2\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x})$.

Or $x = \ln\sqrt{3}$ donc $\mathrm{e}^x = \sqrt{3}$ et $\mathrm{e}^{-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $y = \sqrt{3}$.

On confirme avec Maple :

```
> y:=2*cosh(x)-sinh(x);
```

$$y := 2\,\cosh(x) - \sinh(x)$$

```
> convert(eval(y,x=ln(sqrt(3))),exp);
```

$$\sqrt{3}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{ch}^4 x + \mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}^3 x + \mathrm{sh}^4 x = \mathrm{ch}^3 x(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x) + \mathrm{sh}^3 x(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x) \\ &= (\mathrm{ch}^3 x + \mathrm{sh}^3 x)\mathrm{e}^x = (\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}^2 x)\mathrm{e}^x \\ &= (\mathrm{ch}\,2x - \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x)\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

Voici une autre méthode :

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{ch}^4 x + \mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}^3 x + \mathrm{sh}^4 x \\ &= (\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x)^2 + 2\,\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x(\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2 2x + \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x\,\mathrm{ch}\,2x = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{sh}\,2x = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

On confirme avec Maple :

```
> y:=cosh(x)^4+cosh(x)^3*sinh(x)+sinh(x)^3*cosh(x)+sinh(x)^4;
```

$$y := (\cosh(x))^4 + (\cosh(x))^3\sinh(x) + (\sinh(x))^3\cosh(x) + (\sinh(x))^4$$

```
> simplify(convert(y,exp));
```

$$1/4\,e^{4\,x} + 3/4$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

$$P_n(x)\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{2}\cdot\mathrm{ch}\,\frac{x}{2^2}\cdots\mathrm{ch}\,\frac{x}{2^{n-1}}\left(\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^{n-1}}$$

Par une récurrence évidente : $P_n(x)\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}P_1(x)\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2^n}\mathrm{sh}\,x$.

Ainsi $P_n(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{2^n\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n}}$. Comme $\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ quand $n \to \infty$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = 1$.