Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Donner la valeur de $y = 2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ pour $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 2 [Corrigé]

Exprimer $y = \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x$ à l'aide de l'exponentielle.

Exercice 3 [Corrigé]

Simplifier le produit $P_n(x) = \operatorname{ch}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$.

Exercice 4 [Corrigé]

Calculer la somme $A_n(x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch}(x+2h) + \cdots + \operatorname{ch}(x+2nh)$.

Exercice 5 [Corrigé]

Résoudre l'équation $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Exercice 6 [Corrigé]

Simplifier l'expression $A_n(x) = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \cdots + n\operatorname{ch} nx$.

Exercice 7 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \sin x \operatorname{sh} x$.

Exercice 8 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \mathrm{e}^{x\operatorname{ch} a}\operatorname{ch}(x\operatorname{sh} a)$.

Exercice 9 [Corrigé]

Vérifier l'égalité $|\arctan \operatorname{sh} x| = \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [Corrigé]

Montrer que la tangente en un point M de la courbe $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ est parallèle à l'une des tangentes au cercle $x^2+y^2=a^2$, menée de la projection P de M sur Oy.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On a : $y = 2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x})$.

Or $x = \ln\sqrt{3}$ donc $\mathrm{e}^x = \sqrt{3}$ et $\mathrm{e}^{-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $y = \sqrt{3}$.

On confirme avec Maple :

```
> y:=2*cosh(x)-sinh(x);
```

$$y := 2\cosh(x) - \sinh(x)$$

```
> convert(eval(y,x=ln(sqrt(3))),exp);
```

$$\sqrt{3}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x = \operatorname{ch}^3 x(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + \operatorname{sh}^3 x(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &= (\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x)\mathrm{e}^x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)\mathrm{e}^x \\ &= (\operatorname{ch} 2x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2x)\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

Voici une autre méthode :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2 + 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sh} 2x = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

On confirme avec Maple :

```
> y:=cosh(x)^4+cosh(x)^3*sinh(x)+sinh(x)^3*cosh(x)+sinh(x)^4;
```

$$y := (\cosh(x))^4 + (\cosh(x))^3 \sinh(x) + (\sinh(x))^3 \cosh(x) + (\sinh(x))^4$$

```
> simplify(convert(y,exp));
```

$$1/4\, e^{4\,x} + 3/4$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

$$P_n(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^n} = \operatorname{ch}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\frac{x}{2^{n-1}}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^{n-1}}$$

Par une récurrence évidente : $P_n(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}P_1(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \frac{1}{2^n}\operatorname{sh} x$.

Ainsi $P_n(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$. Comme $\operatorname{sh}\frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ quand $n \to \infty$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = 1$.