

## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ Correction ]

Résoudre l'équation  $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$ .

EXERCICE 2 [ Correction ]

Simplifier  $y(x) = \arccos(1 - 2x^2)$ .

EXERCICE 3 [ Correction ]

Simplifier  $y(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

EXERCICE 4 [ Correction ]

Calculer la valeur exacte de  $x = \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}\right)$ .

EXERCICE 5 [ Correction ]

Simplifier  $y(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ .

EXERCICE 6 [ Correction ]

Simplifier  $y(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$ .

EXERCICE 7 [ Correction ]

Étudier l'application  $x \mapsto f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin(2x)}{2}}$ .

EXERCICE 8 [ Correction ]

Étudier l'application  $x \mapsto f(x) = \arcsin \cos x + \arccos \sin x$ .

EXERCICE 9 [ Correction ]

Étudier l'application  $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \frac{1}{2} \arccos \cos 2x$ .

EXERCICE 10 [ Correction ]

Étudier l'application  $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \frac{1}{2} \arccos \cos 2x + \frac{1}{6} \arccos \cos 3x$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquons que le domaine de définition en  $x$  est  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et que  $x = 0$  est solution évidente.

Par imparité, on peut se contenter de chercher les solutions dans  $]0, \frac{1}{2}]$ .

Si  $x$  est l'une d'elles,  $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3}$  est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\arcsin x$  est dans  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Ces deux membres sont donc égaux si et seulement si ils ont le même sinus.

Ainsi, pour tout  $x$  de  $]0, \frac{1}{2}]$  :

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow x &= 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 2\sqrt{1-3x^2} \\ \Leftrightarrow 1 + 3(1-4x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} &= 4(1-3x^2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation sont  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{2}$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

La quantité  $y(x)$  est définie  $\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ .

Remarquons que l'application  $x \mapsto y(x)$  est paire. On va l'étudier sur  $[0, 1]$ .

Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , posons  $x = \sin \theta$ , avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (donc  $\theta = \arcsin x$ .)

Alors  $y(x) = \arccos(1 - 2\sin^2 \theta) = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$  (car  $2\theta \in [0, \pi]$ .)

On a donc  $y(x) = 2 \arcsin x$  sur  $[0, 1]$ , et  $y(x) = 2 \arcsin |x| = 2 |\arcsin x|$  sur  $[-1, 1]$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

La quantité  $y(x)$  est définie pour  $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$  c'est-à-dire pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

Remarquons que l'application  $x \mapsto y(x)$  est paire. On va l'étudier sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $x$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^+$ . Posons  $x = \tan \theta$ , avec  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , donc  $\theta = \arctan x$ .

On  $y(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$  (car  $2\theta \in [0, \pi]$ .)

On a donc  $y(x) = 2 \arctan x$  sur  $\mathbb{R}^+$ , et  $y(x) = 2 \arctan |x| = 2 |\arctan x|$  sur  $\mathbb{R}$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On a :  $1 - 2x^2 = 1 - 2\sin^2(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}) = \cos(\arcsin \frac{1}{3}) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Il en découle  $x^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{6}$  donc  $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}}$  car  $x \geq 0$ .