Énoncés des exercices

Exercice 1 [Correction]

Résoudre l'équation $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$.

Exercice 2 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

Exercice 3 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Exercice 4 [Correction]

Calculer la valeur exacte de $x = \sin(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3})$.

Exercice 5 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Exercice 6 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$.

Exercice 7 [Correction]

Étudier l'application $x \mapsto f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{1 + \sin(2x)}{2}}$.

Exercice 8 [Correction]

Étudier l'application $x \mapsto f(x) = \arcsin \cos x + \arccos \sin x$.

Exercice 9 [Correction]

Etudier l'application $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \dfrac{1}{2} \arccos \cos 2x$.

Exercice 10 [Correction]

Etudier l'application $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \dfrac{1}{2} \arccos \cos 2x + \dfrac{1}{6} \arccos \cos 3x$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Remarquons que le domaine de définition en x est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et que $x = 0$ est solution évidente.

Par imparité, on peut se contenter de chercher les solutions dans $]0, \frac{1}{2}]$.

Si x est l'une d'elles, $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3}$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\arcsin x$ est dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ces deux membres sont donc égaux si et seulement si ils ont le même sinus.

Ainsi, pour tout x de $]0, \frac{1}{2}]$:

$$\arcsin x = \arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; x = \sin(\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow\; x = 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} \;\Leftrightarrow\; 1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 2\sqrt{1-3x^2}$$

$$\Leftrightarrow\; 1 + 3(1-4x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 4(1-3x^2) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

Conclusion : les solutions de l'équation sont $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La quantité $y(x)$ est définie $\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Remarquons que l'application $x \mapsto y(x)$ est paire. On va l'étudier sur $[0, 1]$.

Pour tout x de $[0, 1]$, posons $x = \sin\theta$, avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (donc $\theta = \arcsin x$.)

Alors $y(x) = \arccos(1 - 2\sin^2\theta) = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$ (car $2\theta \in [0, \pi]$.)

On a donc $y(x) = 2\arcsin x$ sur $[0, 1]$, et $y(x) = 2\arcsin|x| = 2\,|\arcsin x|$ sur $[-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La quantité $y(x)$ est définie pour $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$.

Remarquons que l'application $x \mapsto y(x)$ est paire. On va l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}^+$. Posons $x = \tan\theta$, avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, donc $\theta = \arctan x$.

On $y(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$ (car $2\theta \in [0, \pi]$.)

On a donc $y(x) = 2\arctan x$ sur $\mathbb{R}^+$, et $y(x) = 2\arctan|x| = 2\,|\arctan x|$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On a : $1 - 2x^2 = 1 - 2\sin^2(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}) = \cos(\arcsin\dfrac{1}{3}) = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Il en découle $x^2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}$ donc $x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$ car $x \geq 0$.