

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs réelles. On définit l'application  $M$  par, pour tout réel  $\alpha$  :  $M(\alpha) = \max_{x \in [a, b]} (f(x) + \alpha g(x))$ .  
Montrer que l'application  $M$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 2** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  telle que, pour tous  $x, y$  de  $[a, b]$ , on ait  $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ .  
Montrer que  $f$  est l'une des deux applications  $x \mapsto x$  ou  $x \mapsto a + b - x$ .

**EXERCICE 3** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uniformément continue.  
Montrer qu'il existe deux réels  $a, b \geq 0$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b$ .

**EXERCICE 4** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$  (on demande deux méthodes.)

**EXERCICE 5** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Prouver ( $f, g$  uniformément continues et bornées)  $\Rightarrow (fg$  uniformément continue).  
Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que  $f$  et  $g$  sont bornés.

**EXERCICE 6** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que l'application  $x \mapsto \sin x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 7** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  existent dans  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 8** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $a, b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ , et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
On suppose  $\exists k > 0, \forall x, y \in [a, b]$  (avec  $x \neq y$ ),  $|f(y) - f(x)| < k|y^3 - x^3|$ .

1. Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .
2. Montrer que  $\varphi : x \mapsto f(x) - kx^3$  est strictement monotone sur  $[a, b]$ .
3. On suppose que pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $ka^3 \leq f(x) \leq kb^3$ .  
Montrer qu'il existe un  $\alpha$  unique de  $[a, b]$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$ .

**EXERCICE 9** [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On se donne un réel  $\alpha$  de  $]0, 1[$ .  
En revenant à la définition, montrer que  $x \mapsto x^\alpha$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour tout réel  $\alpha$ , introduire l'application  $h_\alpha : x \mapsto f(x) + \alpha g(x)$ .

Se donner  $\alpha_0$  (resp.  $\alpha_1$ ) et les réels  $x_0$  (resp.  $x_1$ ) où  $h_{\alpha_0}$  (resp.  $h_{\alpha_1}$ ) prend son maximum.

Chercher ensuite à encadrer la quantité  $M(\alpha_0) - M(\alpha_1)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Penser à utiliser  $x = a$  et  $y = b$ . Il n'est pas question de continuité dans cet exercice.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Considérer  $\alpha > 0$  tel que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$ .

Pour tout  $x \neq 0$ , découper  $[0, x]$  en sous-segments de longueur juste inférieure ou égale à  $\alpha$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Première méthode : théorème de Heine sur  $[0, 2]$  et application lipschitzienne sur  $[2, +\infty[$ .

Deuxième méthode : démontrer que  $0 \leq y \leq x \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser  $(fg)(x) - (fg)(y) = f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$ .

Pour le contre-exemple, le carré d'une fonction très simple convient.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Considérer  $x_n = \sqrt{n\pi}$  et  $y_n = \sqrt{(n+1)\pi}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Se donner  $A > 0$  tel que  $x \leq -A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et tel que  $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Utiliser ensuite le théorème de Heine sur  $[-A - 1, A + 1]$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

(1 : Prouver que  $f$  est lipschitzienne. (2 : Traduire l'hypothèse sur  $f$ .

(3 : L'application  $\varphi$  est bijective continue et change de signe.

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Prouver que :  $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$ .