

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans lui-même.

Montrer qu'il existe un point x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe un réel α_n de $[0, 1]$ tel que $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.
2. Montrer que ce résultat est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $\lambda \in]0, 1[$, avec $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.

Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que : $\forall x \in [a, b], 0 < g(x) < f(x)$.

Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que, pour tout x de $[a, b]$: $f(x) \geq \lambda g(x)$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application croissante sur $[a, b]$.

Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Donner un exemple d'une application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, strictement croissante et ayant une infinité dénombrable de points de discontinuité.