Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y : $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y : f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty \;\Leftrightarrow$ l'image réciproque par f de tout compact est un compact.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Pour tout x de $I =]0, 1[$, de développement décimal $x = 0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$, on pose :

$f(x) = 0, r_2 r_1 r_4 r_3 \ldots$. Etudier la continuité de f.

Exercice 8 [Indication] [Correction]

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}^+$: $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 [Indication] [Correction]

Soit λ un réel strictement compris entre 0 et 1.

Prouver l'existence et l'unicité de la racine positive x_n de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \lambda \exp x$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = +\infty$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f, et noter que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, montrer l'existence de $\varepsilon_x \in \{-1, 1\}$ tel que $f(x) = f(0) + \varepsilon_x x$.

Montrer que l'application $x \mapsto \varepsilon_x$ est constante sur $\mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f, et noter que $t_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ est une période de f.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Se souvenir d'une expression de $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ valable pour tous réels x et y.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f du problème. Montrer qu'on peut se ramener au cas $f(0) = 0$.

Montrer que $f(x) = ax$, pour $x \in \mathbb{Z}$, puis x de la forme $x = \dfrac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbb{N}$, puis x réel.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Soit f une solution. Montrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.

Prouver $f(n\lambda) = nf(\lambda)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, puis $f(r) = f(1)r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.

Utiliser la continuité pour montrer que $f(x) = ax$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Se souvenir que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Sinon il suffit d'utiliser la définition de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Montrer que f est discontinue sur les décimaux, et continue sur les "non-décimaux"

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite (u_n) est décroissante en utilisant une relation entre f_n et f_{n+1}.

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 [Retour à l'énoncé]

Pour tout n de $\mathbb{N}$, étudier l'application $\varphi_n : x \mapsto \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.