Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(1) = 1$ et que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \neq 0,\ f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 & (1) \\ \text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y) = f(x) + f(y) & (2). \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Prouver que pour tout rationnel x, $f(x) = x$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $f(x^2) = f(x)^2$.
4. En déduire que f est croissante.
5. Prouver finalement que pour tout réel x, $f(x) = x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout x de $[a, b]$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x + \varepsilon_x) + f(x - \varepsilon_x))$.

Montrer que f est une application affine.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

– L'image de tout rationnel est un irrationnel.

– L'image de tout irrationnel est un rationnel.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On définit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

– Si x est irrationnel, $f(x) = 0$.

– Si x s'écrit $\dfrac{p}{q}$ (fraction irréductible), alors $f(x) = \dfrac{1}{q}$.

Montrer que f est continue sur les irrationnels et discontinue sur les rationnels.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, en choisissant bien x et y.
2. Prouver la relation $f(na) = nf(a)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ et tout a de $\mathbb{R}$.
3. Étudier la quantité $f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)$.
4. Il suffit d'observer que f reste positive sur $\mathbb{R}^+$.
5. Utiliser des suites adjacentes de rationnels convergeant vers x.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Traiter d'abord le cas $\ell = 0$.
  Pour cela considérer $\varepsilon > 0$ et un réel $x_0 > 0$ tel que $x \geq x_0 \Rightarrow |f(x+1) - f(x)| \leq \varepsilon$.
  Se donner $x \geq x_0$ et introduire la partie entière m de $x - x_0$.
  Evaluer alors $f(x)$ en fonction de $f(x-m)$ et de quantités du type $f(x+k+1) - f(x+k)$.
- Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, introduire une fonction auxiliaire qui ramène au cas précédent.
- Dans le cas $\ell = \infty$, adapter la méthode vue dans le cas $\ell = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Traiter d'abord le cas où $f(a) = f(b)$ et montrer que f est constante sur $[a, b]$.
  On pourra considérer le plus petit x_0 tel que $f(x_0) = \min f$ et supposer $a < x_0 < b$.
- Si $f(a) \neq f(b)$, une transformation simple permet de se ramener au cas précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Raisonner par l'absurde, et introduire l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- Pour la discontinuité en $a \in \mathbb{Q}$, utiliser la densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$.
- Pour la continuité en $a \notin \mathbb{Q}$, considérer $A_\varepsilon = \{x \in]0, 1[, f(x) \geq \varepsilon\}$.