# Énoncés des exercices

Exercice 1 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(1) = 1$ et que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \neq 0,\ f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 & (1) \\ \text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y) = f(x) + f(y) & (2). \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est impaire.
2. Prouver que pour tout rationnel $x$, $f(x) = x$.
3. Vérifier que pour tout réel $x$, $f(x^2) = f(x)^2$.
4. En déduire que $f$ est croissante.
5. Prouver finalement que pour tout réel $x$, $f(x) = x$.

Exercice 2 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $f$ une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 3 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x$ de $[a, b]$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+\varepsilon_x) + f(x-\varepsilon_x))$.

Montrer que $f$ est une application affine.

Exercice 4 [ Indication ] [ Correction ]

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

– L'image de tout rationnel est un irrationnel.

– L'image de tout irrationnel est un rationnel.

Exercice 5 [ Indication ] [ Correction ]

On définit $f : ]0, 1[ \to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

– Si $x$ est irrationnel, $f(x) = 0$.

– Si $x$ s'écrit $\dfrac{p}{q}$ (fraction irréductible), alors $f(x) = \dfrac{1}{q}$.

Montrer que $f$ est continue sur les irrationnels et discontinue sur les rationnels.

# Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser la relation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, en choisissant bien $x$ et $y$.
2. Prouver la relation $f(na)=nf(a)$ pour tout $n$ de $\mathbb{Z}$ et tout $a$ de $\mathbb{R}$.
3. Étudier la quantité $f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)$.
4. Il suffit d'observer que $f$ reste positive sur $\mathbb{R}^+$.
5. Utiliser des suites adjacentes de rationnels convergeant vers $x$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– Traiter d'abord le cas $\ell=0$.
  Pour cela considérer $\varepsilon>0$ et un réel $x_0>0$ tel que $x\geq x_0 \Rightarrow |f(x+1)-f(x)|\leq\varepsilon$.
  Se donner $x\geq x_0$ et introduire la partie entière $m$ de $x-x_0$.
  Evaluer alors $f(x)$ en fonction de $f(x-m)$ et de quantités du type $f(x+k+1)-f(x+k)$.
– Dans le cas $\ell\in\mathbb{R}$, introduire une fonction auxiliaire qui ramène au cas précédent.
– Dans le cas $\ell=\infty$, adapter la méthode vue dans le cas $\ell=0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– Traiter d'abord le cas où $f(a)=f(b)$ et montrer que $f$ est constante sur $[a,b]$.
  On pourra considérer le plus petit $x_0$ tel que $f(x_0)=\min f$ et supposer $a<x_0<b$.
– Si $f(a)\neq f(b)$, une transformation simple permet de se ramener au cas précédent.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Raisonner par l'absurde, et introduire l'application $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+x$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

– Pour la discontinuité en $a\in\mathbb{Q}$, utiliser la densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$.
– Pour la continuité en $a\notin\mathbb{Q}$, considérer $A_\varepsilon=\{x\in ]0,1[, f(x)\geq\varepsilon\}$.