Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.
On note $\overline{F}$ l'ensemble des points adhérents de F.
Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace de E.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et f un automorphisme de E.
Montrer que $\|f\| \, \|f^{-1}\| \geq 1$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

E est l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de E.
2. Montrer que l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales est un compact de E.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels normés quelconques sur $\mathbb{K}$.
Soit f une application linéaire de E dans F.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f est continue en 0.

(b) $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \, \|x\|$

(c) f est lipschitzienne sur E.