

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour $u = (x, y)$ par $N(u) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$ est une norme.
Représenter la boule unité fermée de centre 0.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E un espace vectoriel normé, et x, y, z, t quatre vecteurs de E .
Montrer que $\|x - t\| + \|y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - t\| + \|t - z\| + \|z - x\|$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel normé.
Pour toutes parties A et B de E , on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
2. Montrer que si A est compacte et B fermée, alors $A + B$ est fermée.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{K} .

1. Pour tout a de E , montrer que f_a définie par $x \mapsto f_a(x) = \langle a, x \rangle$ est continue.
2. Pour toute partie A de E , on rappelle que $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.
Montrer que A^\perp est un ensemble fermé (donner deux démonstrations.)

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'une des trois normes usuelles :

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) : \|A\|_1 = \sum |a_{ij}|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum a_{ij}^2}, \|A\|_\infty = \sup |a_{ij}|$

Dans chaque cas, calculer la norme de l'application linéaire "trace".

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On montre facilement que N est une norme.

Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $N(u) \leq 1 \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 \leq y \leq -x + 1 \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Appliquer quatre fois l'inégalité triangulaire : $\|x - t\| \leq \|x - y\| + \|y - t\|, \dots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner une suite $(u_n = a_n + b_n)$ de $A + B$.

Procéder à deux extractions de suites consécutives.

2. Se donner une suite $(u_n = a_n + b_n)$ de $A + B$, convergente vers ℓ .

Extraire une suite convergente de la suite (a_n) .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que f_a est lipschitzienne de rapport $\|a\|$.

2. a) Soit (x_n) une suite de A^\perp , convergente vers ℓ . Montrer que $\ell \in A^\perp$.

b) A^\perp est l'intersection des $\{a\}^\perp$, pour $a \in A$, et les $\{a\}^\perp$ sont fermés car...

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

– Avec la norme $A \rightarrow \|A\|_1$:

Vérifier l'inégalité (non améliorable) $|\text{tr}(A)| \leq \|A\|_1$. Donc $\|\text{tr}\| = 1$.

– Avec la norme $A \rightarrow \|A\|_2$:

Appliquer Cauchy-Schwarz. En déduire $\|\text{tr}\| = \sqrt{n}$.

– Avec la norme $A \rightarrow \|A\|_\infty$: on trouve $\|\text{tr}\| = n$.