Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour $u = (x, y)$ par $N(u) = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |x + ty|$ est une norme.

Représenter la boule unité fermée de centre 0.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient E un espace vectoriel normé, et x, y, z, t quatre vecteurs de E.
Montrer que $\|x - t\| + \|y - z\| \le \|x - y\| + \|y - t\| + \|t - z\| + \|z - x\|$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel normé.

Pour toutes parties A et B de E, on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
2. Montrer que si A est compacte et B fermée, alors $A + B$ est fermée.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

1. Pour tout a de E, montrer que f_a définie par $x \mapsto f_a(x) =< a, x >$ est continue.
2. Pour toute partie A de E, on rappelle que $A^{\perp} = \{x \in E, \forall a \in A, < a, x >= 0\}$.
   Montrer que $A^{\perp}$ est un ensemble fermé (donner deux démonstrations.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'une des trois normes usuelles :

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$: $\|A\|_1 = \sum |a_{ij}|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$, $\|A\|_\infty = \sup |a_{ij}|$

Dans chaque cas, calculer la norme de l'application linéaire “trace”.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On montre facilement que N est une norme.

Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $N(u) \leq 1 \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 \leq y \leq -x + 1 \end{cases}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Appliquer quatre fois l'inégalité triangulaire : $\|x - t\| \leq \|x - y\| + \|y - t\|, \cdots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner une suite $(u_n = a_n + b_n)$ de $A + B$.
   Procéder à deux extractions de suites consécutives.
2. Se donner une suite $(u_n = a_n + b_n)$ de $A + B$, convergente vers ℓ.
   Extraire une suite convergente de la suite (a_n).

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que f_a est lipschitzienne de rapport $\|a\|$.

2. a) Soit (x_n) une suite de $A^\perp$, convergente vers ℓ. Montrer que $\ell \in A^\perp$.

   b) $A^\perp$ est l'intersection des $\{a\}^\perp$, pour $a \in A$, et les $\{a\}^\perp$ sont fermés car...

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- Avec la norme $A \to \|A\|_1$:
  Vérifier l'inégalité (non améliorable) $|\mathrm{tr}\,(A)| \leq \|A\|_1$. Donc $\|\mathrm{tr}\,\| = 1$.
- Avec la norme $A \to \|A\|_2$:
  Appliquer Cauchy-Schwarz. En déduire $\|\mathrm{tr}\,\| = \sqrt{n}$.
- Avec la norme $A \to \|A\|_\infty$: on trouve $\|\mathrm{tr}\,\| = n$.