

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose que f et g commutent.

Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

Soit T définie sur E par $T(f)(0) = f(0)$ et, pour $x > 0$, $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le noyau de T . L'opérateur T est-il injectif? surjectif?
3. Indiquer ses valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

Indication : considérer à part le cas de la valeur propre 0.

Donner un contre-exemple dans le cas où E n'est pas de dimension finie.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient A et B dans deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont les combinaisons linéaires de $I_n, M, M^2, \dots, M^{n-1}$.

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible.

Exprimer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction de celui de M .

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Considérer la restriction de g à un sous-espace propre de f .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Seuls les polynômes de degré 2 peuvent être vecteurs propres. On trouve :

$P = \alpha(X^2 - 1)$ pour $\lambda = 1$, $P = \alpha(X^2 - 2X + 1)$ pour -1 , $P = \alpha(X^2 + 2X + 1)$ pour 3 .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si $f \in E$, on a $T(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$ sur \mathbb{R}^{+*} , où F la primitive de f qui s'annule en 0 .

Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$.

2. Si $T(f) = 0$, alors, par dérivation puis continuité, on trouve $f(x) = 0$ sur \mathbb{R}^+ .

T n'est pas surjectif car son image est une partie stricte de E .

3. Vérifier que $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda x f'(x) = (1 - \lambda)f(x)$.

Résoudre l'équation différentielle et prouver que le spectre de T est $]0, 1]$.

Pour tout λ de $]0, 1]$, le sous-espace propre est la droite engendrée par $y_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Remarquer que si $g \circ f$ n'est pas injective, il en est de même de $f \circ g$.

– Si $g \circ f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$ et $x \neq \vec{0}$, composer par f à gauche.

Pour le contre-exemple, choisir $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$ dans $E = \mathbb{K}[X]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Si A est inversible, $\chi_{AB}(x) = \det(AB - xI_n) = \det(A(B - xA^{-1})) = \dots$

Sinon, considérer les matrices $A_\lambda = A - \lambda I_n$, pour tout λ de \mathbb{K} .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n , de matrice M dans la base canonique.

Soit g un endomorphisme de \mathbb{K}^n , commutant avec f .

Constater que g laisse stable les droites vectorielles propres de f .

En déduire un système de Van Der Monde permettant d'écrire $g = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\chi_{M^{-1}}(X) = \det(M^{-1}) (-X)^n \chi_M\left(\frac{1}{X}\right)$.