Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose que f et g commutent.

Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Soit T définie sur E par $T(f)(0) = f(0)$ et, pour $x > 0$, $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau de T. L'opérateur T est-il injectif ? surjectif ?
3. Indiquer ses valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

Indication : considérer à part le cas de la valeur propre 0.

Donner un contre-exemple dans le cas où E n'est pas de dimension finie.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient A et B dans deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont les combinaisons linéaires de $I_n, M, M^2, \ldots, M^{n-1}$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible.

Exprimer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction de celui de M.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Considérer la restriction de g à un sous-espace propre de f.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Seuls les polynômes de degré 2 peuvent être vecteurs propres. On trouve :
$P = \alpha(X^2 - 1)$ pour $\lambda = 1$, $P = \alpha(X^2 - 2X + 1)$ pour -1, $P = \alpha(X^2 + 2X + 1)$ pour 3.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si $f \in E$, on a $T(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, où F la primitive de f qui s'annule en 0.
   Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$.
2. Si $T(f) = 0$, alors, par dérivation puis continuité, on trouve $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
   T n'est pas surjectif car son image est une partie stricte de E.
3. Vérifier que $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda x f'(x) = (1 - \lambda) f(x)$.
   Résoudre l'équation différentielle et prouver que le spectre de T est $]0, 1]$.
   Pour tout λ de $]0, 1]$, le sous-espace propre est la droite engendrée par $y_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Remarquer que si $g \circ f$ n'est pas injective, il en est de même de $f \circ g$.
– Si $g \circ f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$ et $x \neq \overrightarrow{0}$, composer par f à gauche.

Pour le contre-exemple, choisir $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$ dans $E = \mathbb{K}[X]$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si A est inversible, $\chi_{AB}(x) = \det(AB - xI_n) = \det(A(B - xA^{-1})) = \cdots$
Sinon, considérer les matrices $A_\lambda = A - \lambda I_n$, pour tout λ de $\mathbb{K}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, de matrice M dans la base canonique.
Soit g un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, commutant avec f.
Constater que g laisse stable les droites vectorielles propres de f.
En déduire un système de Van Der Monde permettant d'écrire $g = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\chi_{M^{-1}}(X) = \det(M^{-1})\,(-X)^n\,\chi_M\left(\frac{1}{X}\right)$.