Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec $\dim(E) = n \geq 1$.

On suppose que f et g commutent et qu'ils sont diagonalisables.

Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base (e) de E.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - Id)^3 \circ (f + 2Id) = 0$ et $(f - Id)^2 \circ (f + 2Id) \neq 0$.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

1. Montrer que $P \to \varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$ définit un endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On se donne une famille $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de n nombres complexes.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice A de terme général $a_{ij} = \lambda_i \lambda_j$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tous $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A \otimes M)(B \otimes N) = (AB) \otimes (MN)$.
2. Etablir que $\det(A \otimes M) = (\det A)^n (\det M)^2$.
3. Montrer que : A, M inversibles $\Rightarrow A \otimes M$ inversible et $(A \otimes M)^{-1} = A^{-1} \otimes M^{-1}$.
4. Prouver que si A et M sont diagonalisables, alors $A \otimes M$ est diagonalisable.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible et diagonalisable.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $B^2 = A$.

Montrer que B est diagonalisable.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Rappelez pourquoi on peut diagonaliser la restriction de g à chaque sous-espace propre de f.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

f est annulée par $P = (X-1)^3(X+2)$.

f n'est pas diagonalisable, sinon elle serait annulée par $(X-1)(X+2)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est diagonalisable car annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. La linéarité est évidente. Vérifier que si $0 \leq m \leq n$ alors $\varphi(X^m)$ est encore dans $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Vérifier que la matrice de φ dans la base $1, X, \ldots, X^n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire.
   φ est diagonalisable car ayant $n+1$ valeurs propres distinctes.
3. $\forall \lambda \in \{0, -1, \ldots, -n\}$, la droite propre E_λ est engendrée par $P_\lambda = X^{-\lambda}(X-1)^{n+\lambda}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Écarter le cas évident où tous les λ_k sont nuls. Montrer qu'alors A est de rang 1.

Utiliser la trace de A pour trouver la valeur propre $s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Envisager $s = 0$ et $s \neq 0$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Vérification immédiate.
2. Envisager d'abord $a = 0$, puis $a \neq 0$.
3. Utiliser la question 1.
4. Écrire l'égalité $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, et $Q^{-1}MQ = D$, avec D diagonale.
   Avec $R = P \otimes Q$, montrer que $R^{-1}(A \otimes M)R = \begin{pmatrix} \lambda D & 0_n \\ 0_n & \mu D \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Soit $P = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de A.

Chaque λ_k étant non nul, considérer ses deux racines carrées distinctes α_k et $-\alpha_k$.

En déduire $\prod_{k=1}^{m} (B - \alpha_k I_n)(B + \alpha_k I_n) = 0$.