Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe P telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. Calculer A^n, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Trouver P inversible telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure "la plus simple possible".

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = J$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = J$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Peut-on diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$. En déduire $A^n = PT^nP^{-1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)^2$.

$\lambda = -1$ est valeur propre double mais le sous-espace propre est une droite.

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 12 \\ -1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $(A-I_4)^2 \neq 0$ et $(A-I_4)^3 = 0_4$.

On choisir par exemple $u_3 = (1,0,0,0)$, puis $u_2 = (f-\mathrm{Id})(u_3)$ et $u_1 = (f-\mathrm{Id})^2(u_3)$.

On choisit $u_4 = (x,y,z,t)$ dans le noyau de $f-\mathrm{Id}$ et libre avec u_1, u_2, u_3.

On obtient par exemple la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

La matrice suivante convient : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^3 = 0$. Ainsi A est nilpotente.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $D = 0$, donc serait nulle.

On peut trigonaliser A car elle est annulée par $P = X^3$, qui est scindé.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.