Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe P telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. Calculer A^n, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Trouver P inversible telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure "la plus simple possible".

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = J$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = J$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Peut-on diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$. En déduire $A^n = PT^nP^{-1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$.

$\lambda = -1$ est valeur propre double mais le sous-espace propre est une droite.

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 12 \\ -1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $(A - I_4)^2 \neq 0$ et $(A - I_4)^3 = 0_4$.

On choisir par exemple $u_3 = (1, 0, 0, 0)$, puis $u_2 = (f - \mathrm{Id})(u_3)$ et $u_1 = (f - \mathrm{Id})^2(u_3)$.

On choisit $u_4 = (x, y, z, t)$ dans le noyau de $f - \mathrm{Id}$ et libre avec u_1, u_2, u_3.

On obtient par exemple la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

La matrice suivante convient : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^3 = 0$. Ainsi A est nilpotente.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $D = 0$, donc serait nulle.

On peut trigonaliser A car elle est annulée par $P = X^3$, qui est scindé.