



## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une base formée de matrices orthogonales.

Montrer que ce résultat reste vrai dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Montrer que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^T A \cdot B)$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Pour quelles matrices  $M$  l'application  $A \rightarrow AM$  est-elle alors orthogonale ?

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1-i & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2-i & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 1-i & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$  est inversible.

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $A$  une matrice carrée symétrique, à coefficients réels.

On suppose que  $A^m = I$ , pour un certain entier  $m$ . Montrer que  $A^2 = I$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice orthogonale d'ordre  $n$ . Prouver  $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$  et  $\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$ .



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , considérer  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ , noter  $E_{ij}$  les matrices de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Considérer  $F_j = I_n - 2E_{jj}$  (pour  $j \geq 2$ ). Pour tous  $i < j$  noter  $G_{ij}$  et  $H_{ij}$  les matrices qui se déduisent respectivement de  $I_n$  et de  $F_j$  par échange des lignes d'indice  $i$  et  $j$ .

Considérer la famille formée de  $I_n$ , des  $F_j$ , des  $G_{ij}$  et des  $H_{ij}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Si  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$ , montrer que  $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$ .

2. Montrer que  $A \rightarrow AM$  est orthogonale  $\Leftrightarrow \text{tr}({}^T A B M {}^T M) = \text{tr}({}^T A B)$ , pour tous  $A, B$ .

Montrer que cela signifie que  $M$  est une matrice orthogonale.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

$A = S - iI_4$ , où  $S$  est symétrique réelle.

D'après le cours, les valeurs propres de  $S$  sont toutes réelles.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Diagonaliser  $A$ . Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont dans  $\{-1, 1\}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Majorer  $S = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$  en utilisant Cauchy-Schwarz.

Pour la deuxième majoration, poser  $T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$ .

Soit  $f \in O(\mathbb{R}^n)$  de matrice  $A$  dans la base canonique. Soit  $u = (1, 1, \dots, 1)$ .

Vérifier que  $T = \langle u, f(u) \rangle$ . Appliquer à nouveau Cauchy-Schwarz.